

Egy dugómodell

Fiatalkorú oktatók napja

Balázs Márton

MTA-BME Sztochasztika Kutatócsoport

Budapest, 2008. június 3.

Dugók

A dugó kezdete

A dugó vége

Az örökifjúság

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Stacionárius eloszlás

A végtelen modell

Nagy léptékben

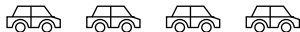
A dugó kezdete

A dugó vége

A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



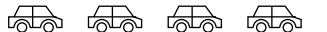
A dugó kezdete



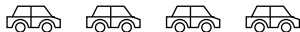
A dugó kezdete



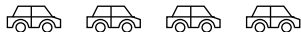
A dugó kezdete



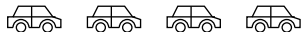
A dugó kezdete



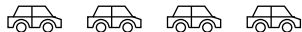
A dugó kezdete



A dugó kezdete



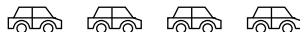
A dugó kezdete



A dugó kezdete



A dugó kezdete



Meglátjuk az álló autókat \rightsquigarrow intenzív fékezés.

A dugó kezdete éles.

A dugó kezdete

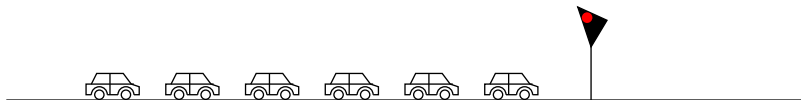


Meglátjuk az álló autókat \rightsquigarrow intenzív fékezés.

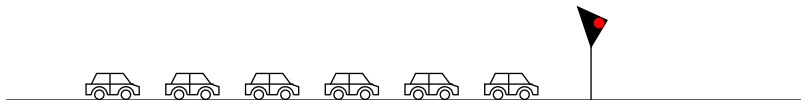
A dugó kezdete éles.

Többek közt ezért veszélyes hely az autópálya.

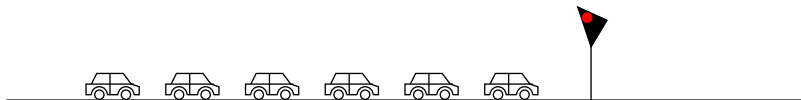
A dugó vége



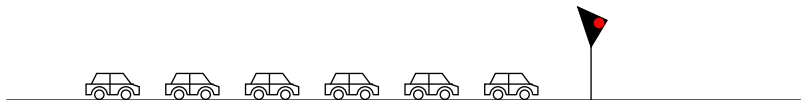
A dugó vége



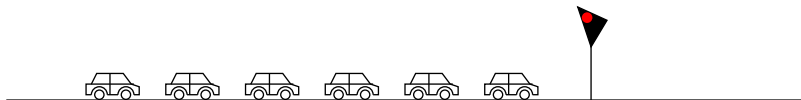
A dugó vége



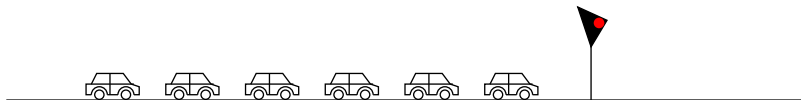
A dugó vége



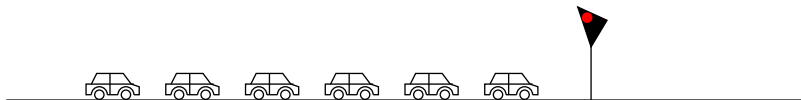
A dugó vége



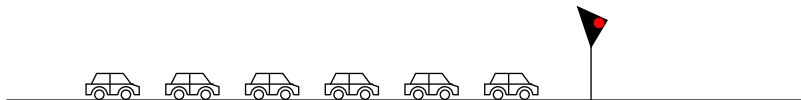
A dugó vége



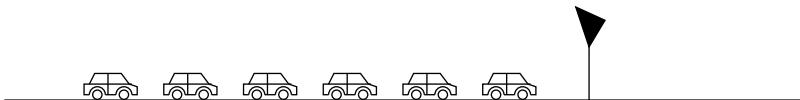
A dugó vége



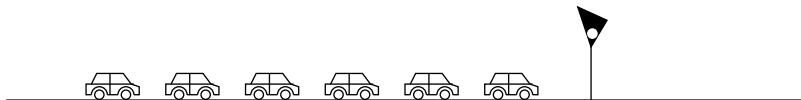
A dugó vége



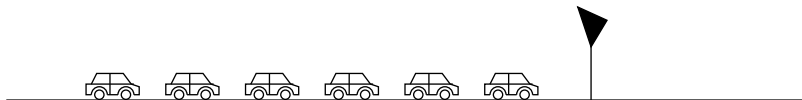
A dugó vége



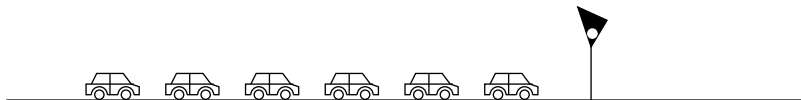
A dugó vége



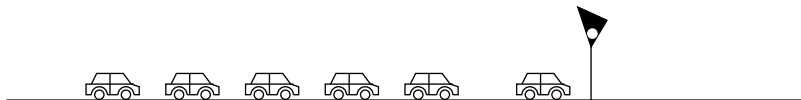
A dugó vége



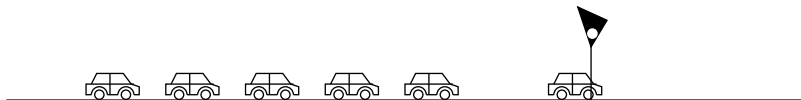
A dugó vége



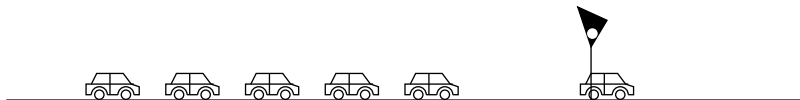
A dugó vége



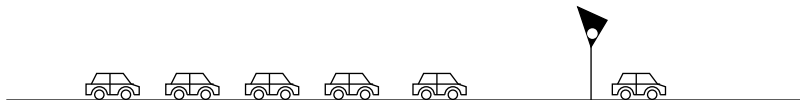
A dugó vége



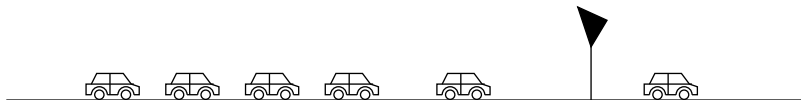
A dugó vége



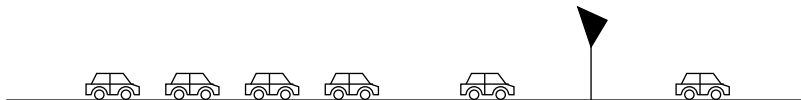
A dugó vége



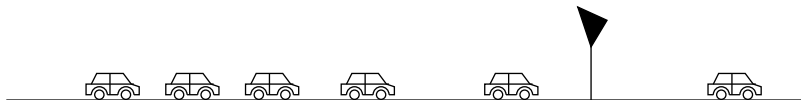
A dugó vége



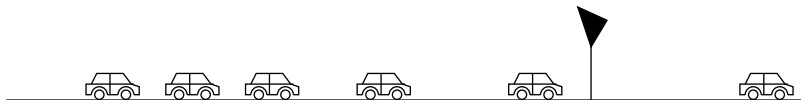
A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



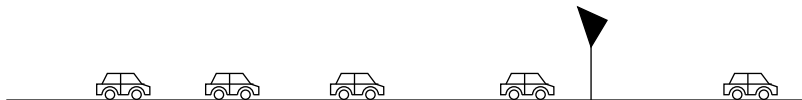
A dugó vége



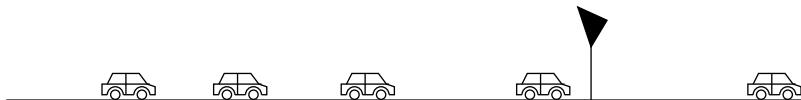
A dugó vége



A dugó vége



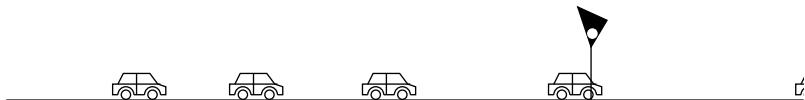
A dugó vége



A dugó vége



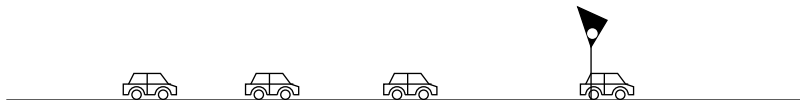
A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



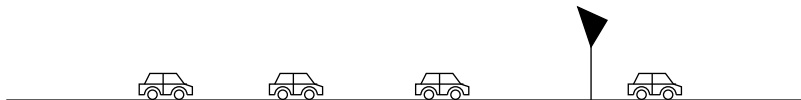
A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



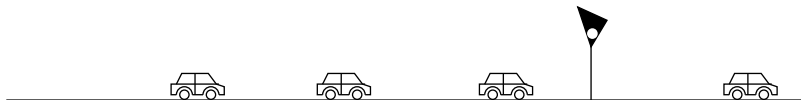
A dugó vége



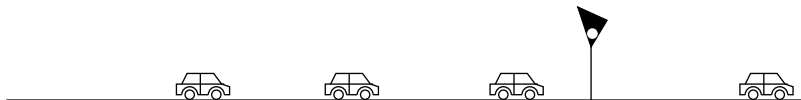
A dugó vége



A dugó vége



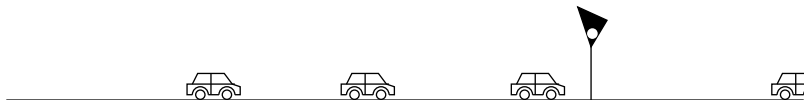
A dugó vége



A dugó vége



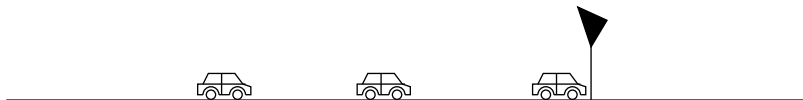
A dugó vége



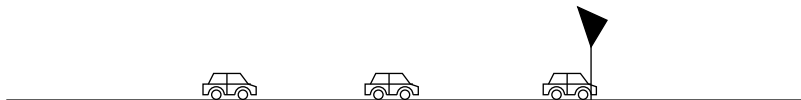
A dugó vége



A dugó vége



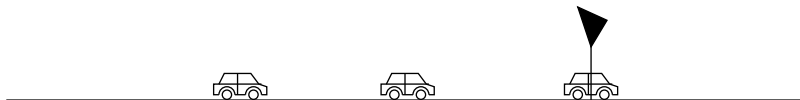
A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



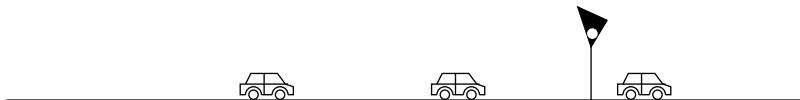
A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



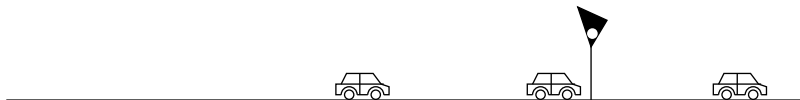
A dugó vége



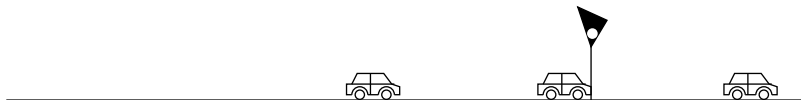
A dugó vége



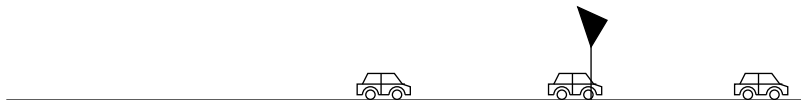
A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A dugó vége



A hátsóbbaknak lassú, elhúzóó gyorsítás

A dugó vége



A hátsóbbaknak lassú, elhúzódo gyorsítás

A dugó vége elmosódott.

A dugó vége



A hátsóbbaknak lassú, elhúzódo gyorsítás

A dugó vége elmosódott.

Miért van ekkora különbség a dugó kezdete és vége között?

A dugó vége



A hátsóbbaknak lassú, elhúzódo gyorsítás

A dugó vége elmosódott.

Miért van ekkora különbség a dugó kezdete és vége között?

Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat: **egy magyarázat**

Az örökifjúság

Kersünk egy véletlen időt, mely nem emlékszik a múltjára.
Legyen $T > 0$ olyan véletlen idő, hogy

$$\mathbf{P}\{T > t\} = e^{-t} \quad \text{minden } t > 0\text{-ra.}$$

Az örökifjúság

Kersünk egy véletlen időt, mely nem emlékszik a múltjára.
Legyen $T > 0$ olyan véletlen idő, hogy

$$\mathbf{P}\{T > t\} = e^{-t} \quad \text{minden } t > 0\text{-ra.}$$

Feltéve, hogy ez az idő t -kor még nem telt le, mi a valószínűsége, hogy újabb s ideig sem telik le?

Azaz: azon eseteknek, amikor $T > t$, hányadrésztében lesz $T > t + s$ is igaz?

Az örökifjúság

Kersünk egy véletlen időt, mely nem emlékszik a múltjára.
Legyen $T > 0$ olyan véletlen idő, hogy

$$\mathbf{P}\{T > t\} = e^{-t} \quad \text{minden } t > 0\text{-ra.}$$

Feltéve, hogy ez az idő t -kor még nem telt le, mi a valószínűsége, hogy újabb s ideig sem telik le?

Azaz: azon eseteknek, amikor $T > t$, hányadrészában lesz $T > t + s$ is igaz?

Válasz:

$$\frac{\mathbf{P}\{T > t + s\}}{\mathbf{P}\{T > t\}} = \frac{e^{-(t+s)}}{e^{-t}} = e^{-s}.$$

Az örökifjúság

Kersünk egy véletlen időt, mely nem emlékszik a múltjára.
Legyen $T > 0$ olyan véletlen idő, hogy

$$\mathbf{P}\{T > t\} = e^{-t} \quad \text{minden } t > 0\text{-ra.}$$

Feltéve, hogy ez az idő t -kor még nem telt le, mi a valószínűsége, hogy újabb s ideig sem telik le?

Azaz: azon eseteknek, amikor $T > t$, hányadrésztében lesz $T > t + s$ is igaz?

Válasz:

$$\frac{\mathbf{P}\{T > t + s\}}{\mathbf{P}\{T > t\}} = \frac{e^{-(t+s)}}{e^{-t}} = e^{-s} = \mathbf{P}\{T > s\}.$$

Ugyanaz, mint $\mathbf{P}\{T > s\}$, t -től függetlenül!

Az örökifjúság

Kersünk egy véletlen időt, mely nem emlékszik a múltjára.
Legyen $T > 0$ olyan véletlen idő, hogy

$$\mathbf{P}\{T > t\} = e^{-t} \quad \text{minden } t > 0\text{-ra.}$$

Feltéve, hogy ez az idő t -kor még nem telt le, mi a valószínűsége, hogy újabb s ideig sem telik le?

Azaz: azon eseteknek, amikor $T > t$, hányadrészében lesz $T > t + s$ is igaz?

Válasz:

$$\frac{\mathbf{P}\{T > t + s\}}{\mathbf{P}\{T > t\}} = \frac{e^{-(t+s)}}{e^{-t}} = e^{-s} = \mathbf{P}\{T > s\}.$$

Ugyanaz, mint $\mathbf{P}\{T > s\}$, t -től függetlenül!

Megtaláltuk az örökifjúság titkát.

Az örökifjúság

 ← ő lesz a T idő után megszólaló örökifjú vekker

Az örökifjúság

 ← ő lesz a T idő után megszólaló örökifjú vekker

↪ Mi a valószínűsége, hogy egy  pici t időn belül megszólal?

Az örökifjúság

 ← ő lesz a T idő után megszólaló örökifjú vekker

↪ Mi a valószínűsége, hogy egy  pici t időn belül megszólal?



$$\mathbf{P}\{T \leq t\} = 1 - \mathbf{P}\{T > t\} = 1 - e^{-t} \simeq 1 - (1 - t) + \text{hiba} = t + \text{hiba}.$$

Az örökifjúság

 ← ő lesz a T idő után megszólaló örökifjú vekker

↪ Mi a valószínűsége, hogy egy  pici t időn belül megszólal?

$$\mathbf{P}\{T \leq t\} = 1 - \mathbf{P}\{T > t\} = 1 - e^{-t} \simeq 1 - (1 - t) + \text{hiba} = t + \text{hiba}.$$



↪ Mi a valószínűsége, hogy két független   pici t időn belül megszólal?

Az örökifjúság

 ← ő lesz a T idő után megszólaló örökifjú vekker

↪ Mi a valószínűsége, hogy egy  pici t időn belül megszólal?

$$\mathbf{P}\{T \leq t\} = 1 - \mathbf{P}\{T > t\} = 1 - e^{-t} \simeq 1 - (1 - t) + \text{hiba} = t + \text{hiba}.$$

↪ Mi a valószínűsége, hogy két független   pici t időn belül megszólal?



$$\mathbf{P}\{T \leq t\} \cdot \mathbf{P}\{T \leq t\} \simeq t^2 + \text{hiba} = \text{hiba}.$$

Az örökifjúság

 ← ő lesz a T idő után megszólaló örökifjú vekker

↪ Mi a valószínűsége, hogy egy  pici t időn belül megszólal?


$$\mathbf{P}\{T \leq t\} = 1 - \mathbf{P}\{T > t\} = 1 - e^{-t} \simeq 1 - (1 - t) + \text{hiba} = t + \text{hiba}.$$

↪ Mi a valószínűsége, hogy két független   pici t időn belül megszólal?


$$\mathbf{P}\{T \leq t\} \cdot \mathbf{P}\{T \leq t\} \simeq t^2 + \text{hiba} = \text{hiba}.$$

→ Több vekker, még kisebb valószínűség.

Az örökifjúság

↪ Mi a valószínűsége, hogy k független  közül pici t időn belül *egyik sem* szólal meg?

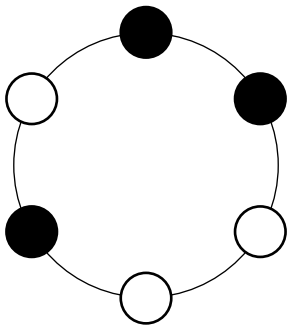
Az örökifjúság

↪ Mi a valószínűsége, hogy k független  közül kicsi t időn belül *egyik sem* szólal meg?

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\text{egyik sem szólal meg}\} &= \mathbf{P}\{T > t\}^k \\ &= e^{-kt} \\ &\simeq (1 - kt) + \text{hiba.}\end{aligned}$$

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

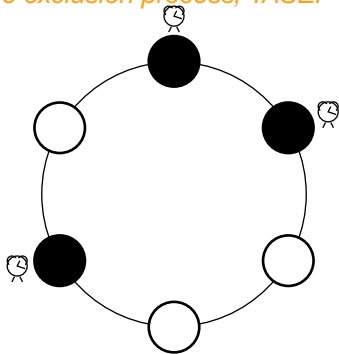
Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP




N lehetséges helyen m golyó.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

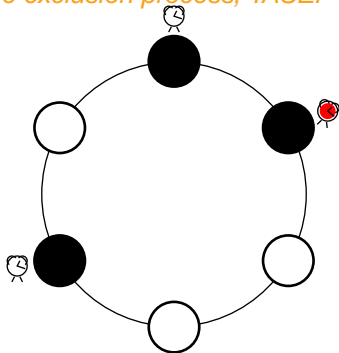


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

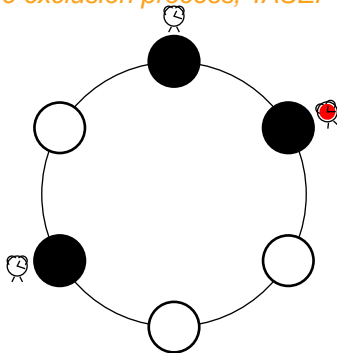


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

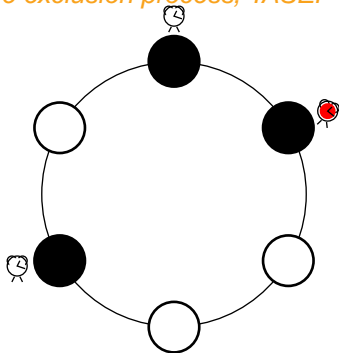


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

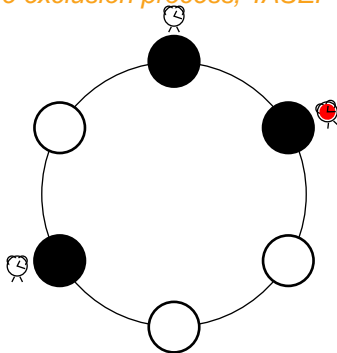


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

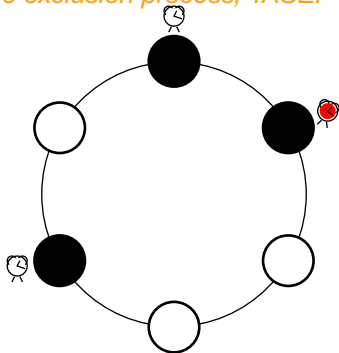


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

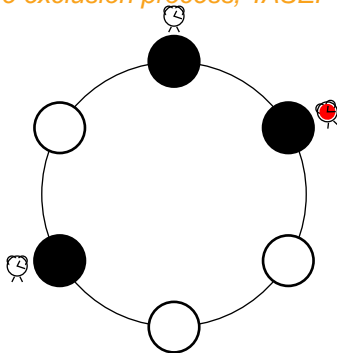


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

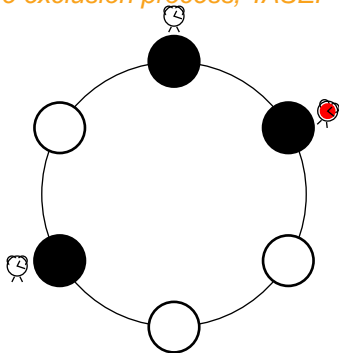


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

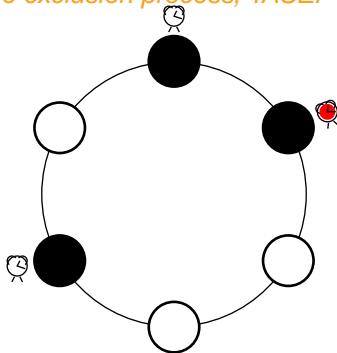


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

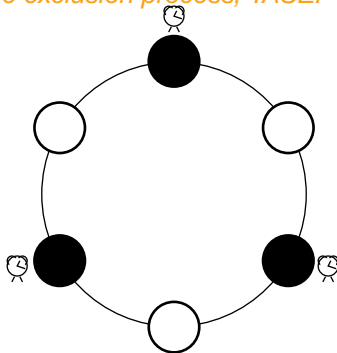


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

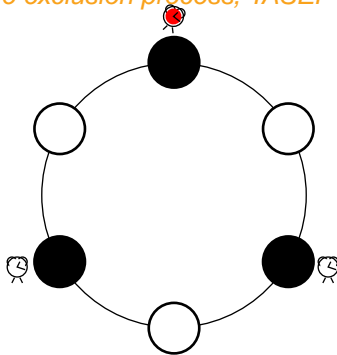


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

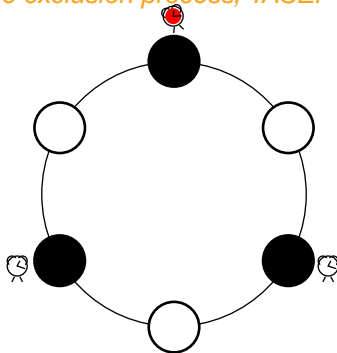


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

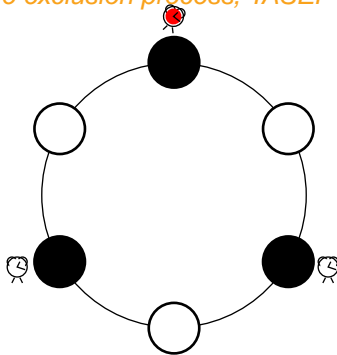


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

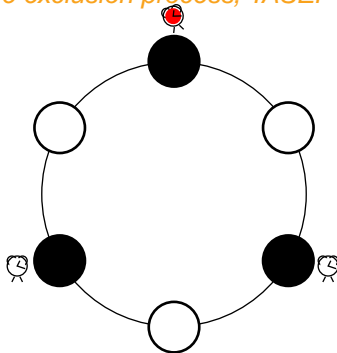


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

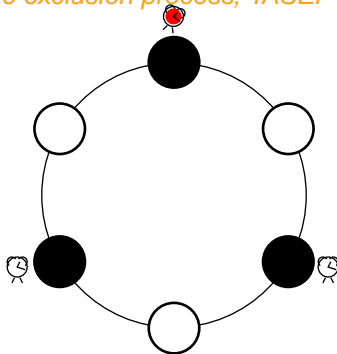


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

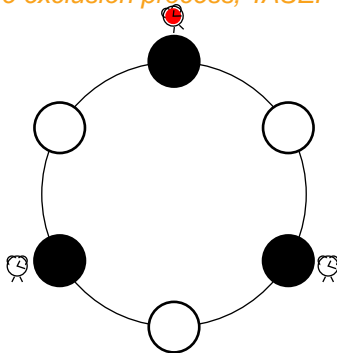


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

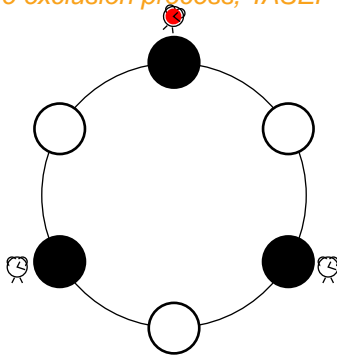


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

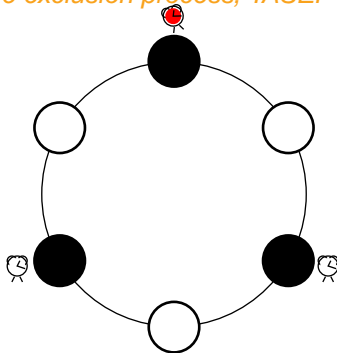


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

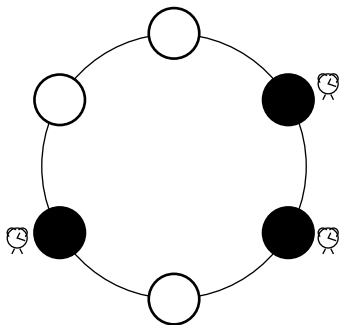


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

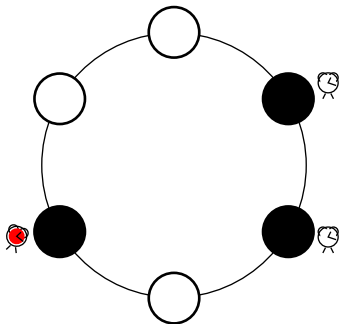


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

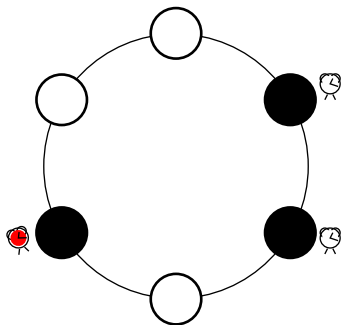


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

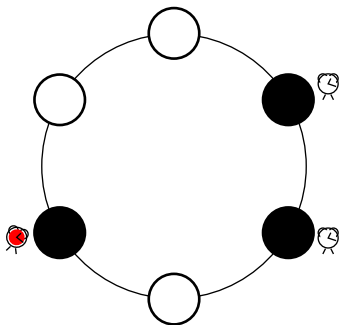


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

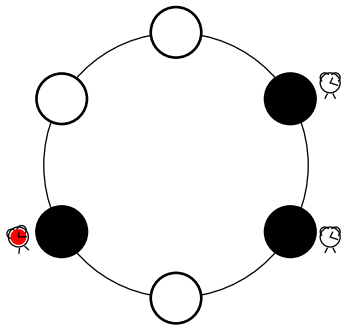


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

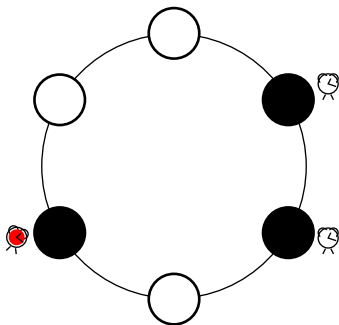


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

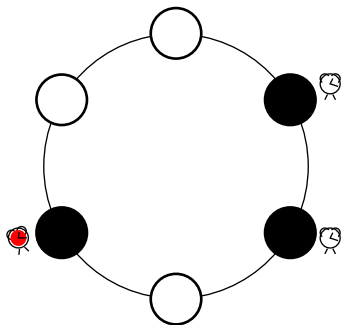


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

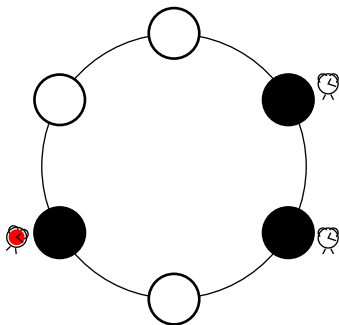


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

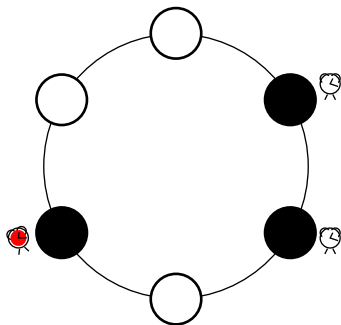


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

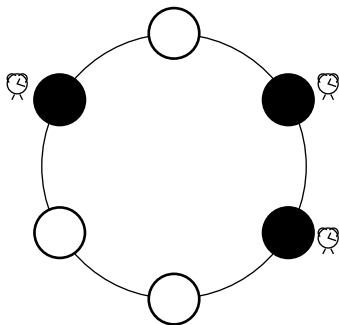


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

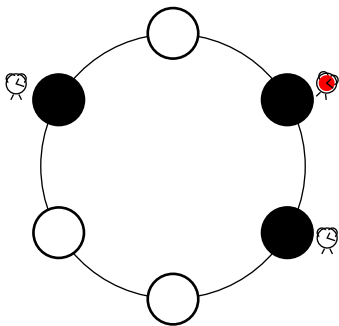


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

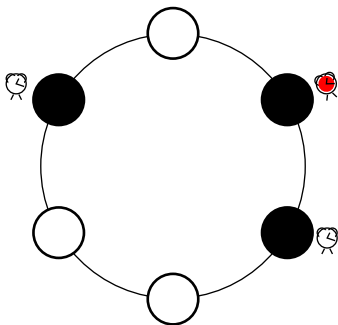


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

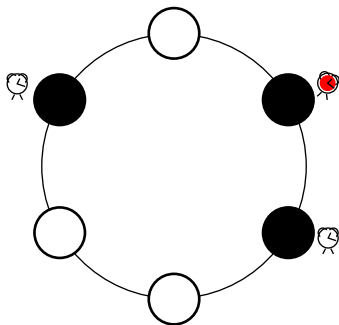


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

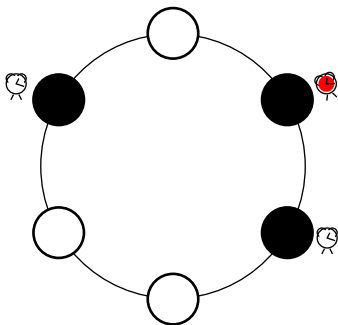


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

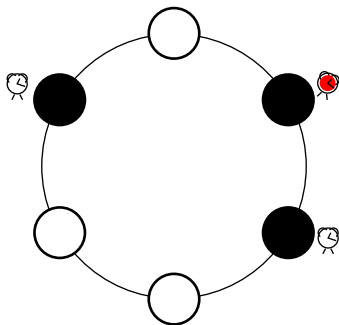


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

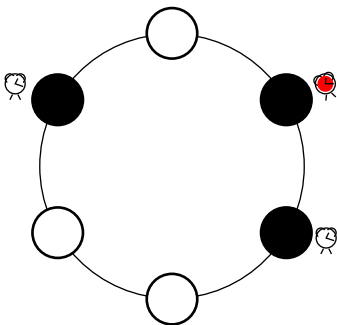


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

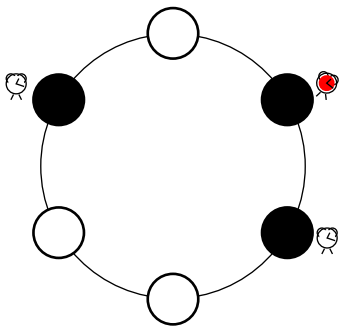


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

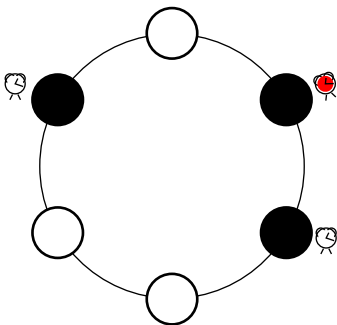


N lehetséges helyen m golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

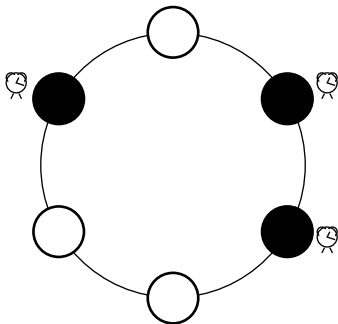


N lehetséges helyen m golyó.

Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP

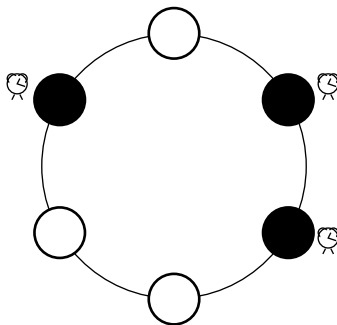


N lehetséges helyen m golyó.

Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra. **De néha a golyó blokkolva van.**


A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP



N lehetséges helyen m golyó.

Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra. De néha a golyó blokkolva van.

Örökifjú, független -k \Rightarrow ha ismerem a jelent, nem kell tudnom a múltat. *Markov-tulajdonság, könnyen kezelhető.*

Stacionárius eloszlás

Véletlen folyamat \rightsquigarrow *eloszlásokról* van értelme beszélni.

Stacionárius eloszlás

Véletlen folyamat \rightsquigarrow *eloszlásokról* van értelme beszélni.

Mi lehet a stacionárius **azaz időben nem változó** eloszlás?

Stacionárius eloszlás

Véletlen folyamat \rightsquigarrow *eloszlásokról* van értelme beszélni.

Mi lehet a stacionárius **azaz időben nem változó** eloszlás?

Tétel

Rögzített N és m mellett az az eloszlás, amely szerint minden konfiguráció (**persze N helyen elosztott m golyó!**) egyenlő valószínű, stacionárius.

Stacionárius eloszlás

Véletlen folyamat \rightsquigarrow *eloszlásokról* van értelme beszélni.

Mi lehet a stacionárius **azaz időben nem változó** eloszlás?

Tétel

Rögzített N és m mellett az az eloszlás, amely szerint minden konfiguráció (**persze N helyen elosztott m golyó!**) egyenlő valószínű, stacionárius.

1. Megjegyzés

Ekkor minden m golyós konfiguráció valószínűsége $1 / \binom{N}{m}$.

Stacionárius eloszlás

Véletlen folyamat \rightsquigarrow *eloszlásokról* van értelme beszélni.

Mi lehet a stacionárius **azaz időben nem változó** eloszlás?

Tétel

Rögzített N és m mellett az az eloszlás, amely szerint minden konfiguráció (**persze N helyen elosztott m golyó!**) egyenlő valószínű, stacionárius.

1. Megjegyzés

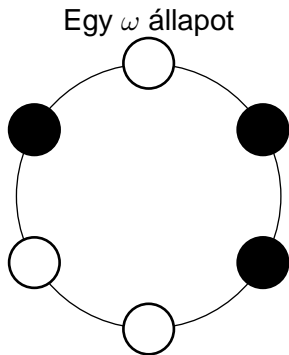
Ekkor minden m golyós konfiguráció valószínűsége $1 / \binom{N}{m}$.

2. Megjegyzés

Nincs is más stacionárius eloszlás adott N , m -mellett.

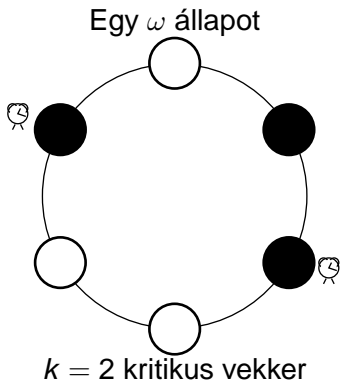
Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás



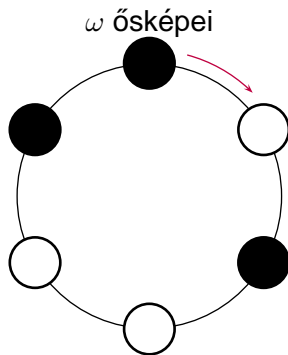
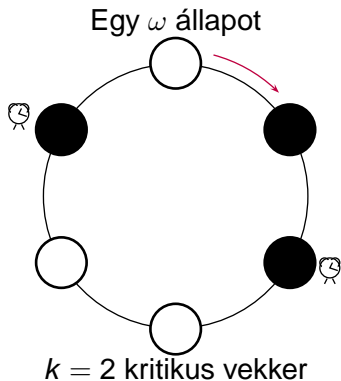
Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás



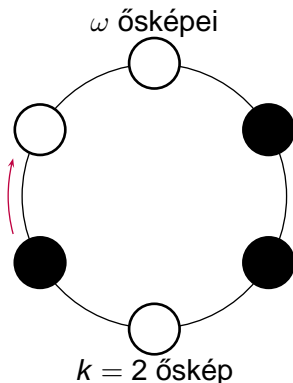
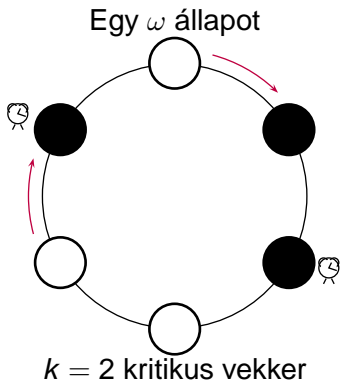
Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás



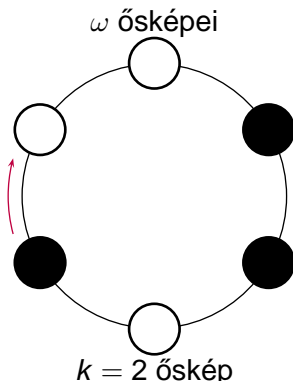
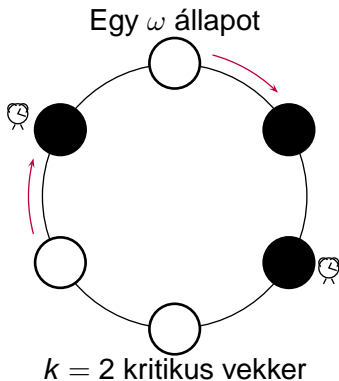
Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás



Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás



ω kritikus vekkereinek száma = ω ősképeinek száma = k

Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás

Tegyük fel, hogy s -kor minden (m golyós) állapot valószínűsége p . Mi az ω állapot valószínűsége kicsi t idő múlva?

Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás

Tegyük fel, hogy s -kor minden (m golyós) állapot valószínűsége p . Mi az ω állapot valószínűsége kicsi t idő múlva?

$$\mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\}$$

Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás

Tegyük fel, hogy s -kor minden (m golyós) állapot valószínűsége p . Mi az ω állapot valószínűsége kicsi t idő múlva?

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\ = & \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és } t \text{ ideig nem lép}\} \\ & + \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ egy ősképe volt, és } \omega\text{-ba lépett}\} \\ & + \text{hiba (legalább 2 lépés történt a kicsi } t \text{ idő alatt)} \end{aligned}$$

Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás

Tegyük fel, hogy s -kor minden (m golyós) állapot valószínűsége p . Mi az ω állapot valószínűsége kicsi t idő múlva?

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\
 = & \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és } t \text{ ideig nem lép}\} \\
 & + \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ egy ősképe volt, és } \omega\text{-ba lépett}\} \\
 & + \text{hiba (legalább 2 lépés történt a kicsi } t \text{ idő alatt)} \\
 = & \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és a } k \text{ db. kritikus } \textcircled{R} \text{ egyike sem szól}\} \\
 & + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} \mathbf{P}\{s\text{-kor } \eta \text{ és pont a megfelelő kritikus } \textcircled{R} \text{ szól}\} \\
 & + \text{hiba}
 \end{aligned}$$

Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\
 = & \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és a } k \text{ db. kritikus } \textcircled{?} \text{ egyike sem szól}\} \\
 & + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} \mathbf{P}\{s\text{-kor } \eta \text{ és pont a megfelelő kritikus } \textcircled{?} \text{ szól}\} \\
 & + \text{hiba}
 \end{aligned}$$

Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\
 = & \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és a } k \text{ db. kritikus } \textcircled{?} \text{ egyike sem szól}\} \\
 & + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} \mathbf{P}\{s\text{-kor } \eta \text{ és pont a megfelelő kritikus } \textcircled{?} \text{ szól}\} \\
 & + \text{hiba} \\
 = & p \cdot (1 - kt) + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} p \cdot t + \text{hiba}
 \end{aligned}$$

Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\
 = & \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és a } k \text{ db. kritikus } \textcircled{?} \text{ egyike sem szól}\} \\
 & + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} \mathbf{P}\{s\text{-kor } \eta \text{ és pont a megfelelő kritikus } \textcircled{?} \text{ szól}\} \\
 & + \text{hiba} \\
 = & p \cdot (1 - kt) + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} p \cdot t + \text{hiba} \\
 = & p \cdot (1 - kt) + k \cdot p \cdot t + \text{hiba}
 \end{aligned}$$

Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\
 &= \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és a } k \text{ db. kritikus } \textcircled{?} \text{ egyike sem szól}\} \\
 &+ \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} \mathbf{P}\{s\text{-kor } \eta \text{ és pont a megfelelő kritikus } \textcircled{?} \text{ szól}\} \\
 &+ \text{hiba} \\
 &= p \cdot (1 - kt) + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} p \cdot t + \text{hiba} \\
 &= p \cdot (1 - kt) + k \cdot p \cdot t + \text{hiba} = p + \text{hiba}.
 \end{aligned}$$

Stacionárius eloszlás

Majdnem-bizonyítás

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\
 &= \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és a } k \text{ db. kritikus } \textcircled{?} \text{ egyike sem szól}\} \\
 &+ \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} \mathbf{P}\{s\text{-kor } \eta \text{ és pont a megfelelő kritikus } \textcircled{?} \text{ szól}\} \\
 &+ \text{hiba} \\
 &= p \cdot (1 - kt) + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} p \cdot t + \text{hiba} \\
 &= p \cdot (1 - kt) + k \cdot p \cdot t + \text{hiba} = p + \text{hiba}.
 \end{aligned}$$

Itt hiba $\simeq t^2$, ezért egyre több és egyre kisebb t hosszú intervallumra összeadogatva is még kicsi marad. □

A végtelen modell

Legyen most N (a helyek száma) és m (a golyók száma) egyre nagyobb úgy, hogy $m/N \simeq \varrho$.

A végtelen modell

Legyen most N (a helyek száma) és m (a golyók száma) egyre nagyobb úgy, hogy $m/N \simeq \varrho$.

ϱ a részecskesűrűség, annak valószínűsége, hogy egy adott helyen van golyó.

A végtelen modell

Legyen most N (a helyek száma) és m (a golyók száma) egyre nagyobb úgy, hogy $m/N \simeq \varrho$.

ϱ a részecskesűrűség, annak valószínűsége, hogy egy adott helyen van golyó.

Az, hogy egy helyen van-e golyó és a szomszéd helye(ke)n van-e golyó egyre kevésbé függenek egymástól.

A végtelen modell

Legyen most N (a helyek száma) és m (a golyók száma) egyre nagyobb úgy, hogy $m/N \simeq \varrho$.

ϱ a részecskesűrűség, annak valószínűsége, hogy egy adott helyen van golyó.

Az, hogy egy helyen van-e golyó és a szomszéd helye(ke)n van-e golyó egyre kevésbé függenek egymástól.

Határértékben a \mathbb{Z} -n kapunk egy modellt, melynek stacionárius eloszlása az, hogy minden helyen van golyó ϱ , nincs golyó $1 - \varrho$ valószínűséggel, különböző helyekre függetlenül.

Nagy léptékben

Nézzük a végtelen modellt messziről, és hagyjuk sokáig fejlődni. Ha a ρ kezdeti sűrűséget lassan, azaz nagy távolság-léptékben (X) változtatjuk, akkor a modell eloszlása nem lesz stacionárius, hanem a részecskék sűrűsége lassan, azaz nagy idő-léptékben (T) változni fog.

Nagy léptékben

Nézzük a végtelen modellt messziről, és hagyjuk sokáig fejlődni. Ha a ϱ kezdeti sűrűséget lassan, azaz nagy távolság-léptékben (X) változtatjuk, akkor a modell eloszlása nem lesz stacionárius, hanem a részecskék sűrűsége lassan, azaz nagy idő-léptékben (T) változni fog.

Tétel

Az így kapott nagyléptékű $\varrho(T, X)$ sűrűség kielégíti a

$$\frac{\partial \varrho}{\partial T} + \frac{\partial \varrho(1 - \varrho)}{\partial X} = 0$$

differenciálegyenletet (*Burgers egyenlet*).

Nagy léptékben

Nézzük a végtelen modellt messziről, és hagyjuk sokáig fejlődni. Ha a ϱ kezdeti sűrűséget lassan, azaz nagy távolság-léptékben (X) változtatjuk, akkor a modell eloszlása nem lesz stacionárius, hanem a részecskék sűrűsége lassan, azaz nagy idő-léptékben (T) változni fog.

Tétel

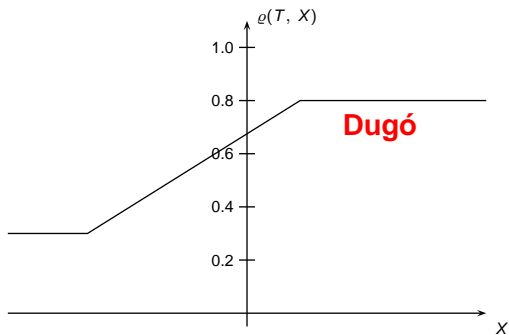
Az így kapott nagyléptékű $\varrho(T, X)$ sűrűség kielégíti a

$$\frac{\partial \varrho}{\partial T} + \frac{\partial \varrho(1 - \varrho)}{\partial X} = 0$$

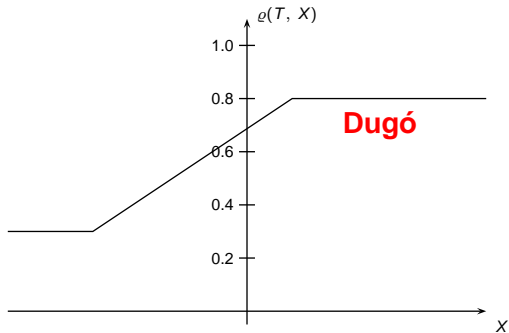
differenciálegyenletet (*Burgers egyenlet*).

Ennek bizonyos megoldásai a következők:

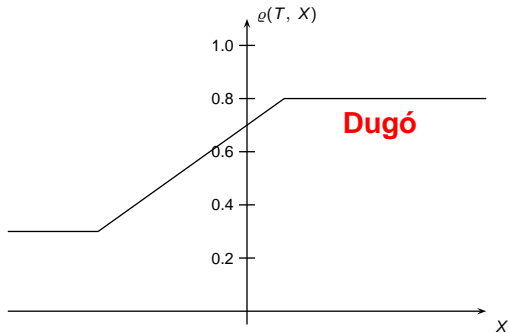
Nagy léptékben



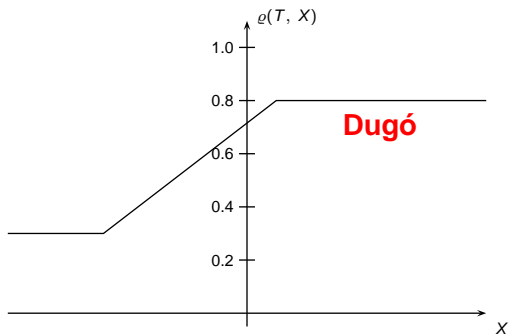
Nagy léptékben



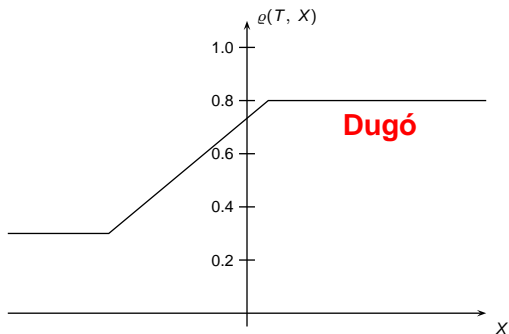
Nagy léptékben



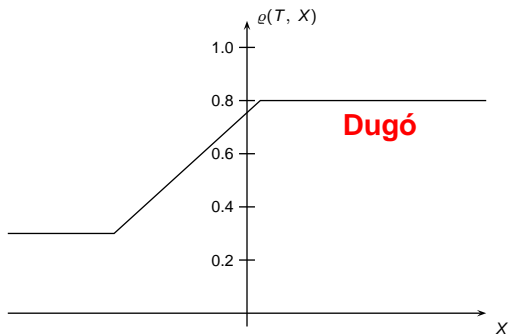
Nagy léptékben



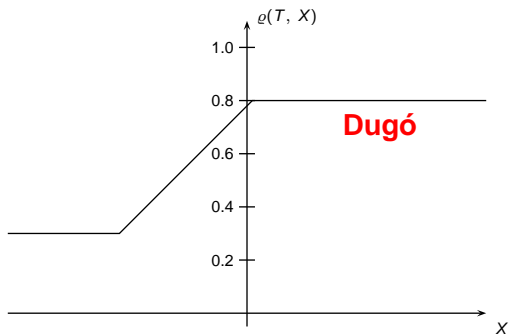
Nagy léptékben



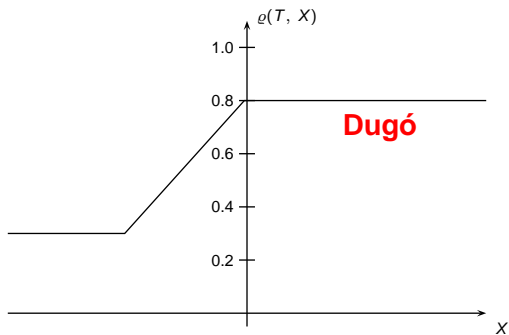
Nagy léptékben



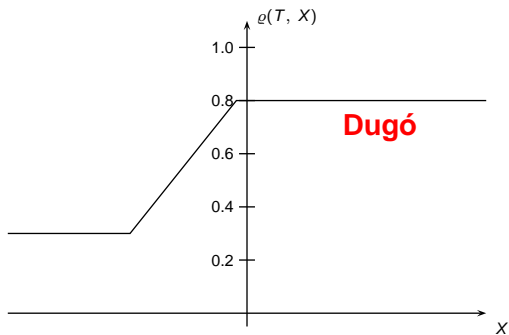
Nagy léptékben



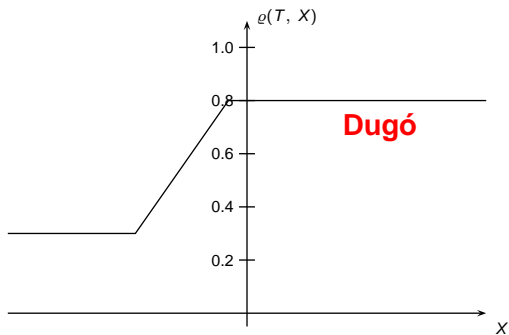
Nagy léptékben



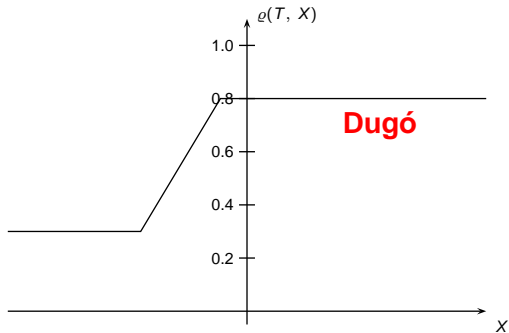
Nagy léptékben



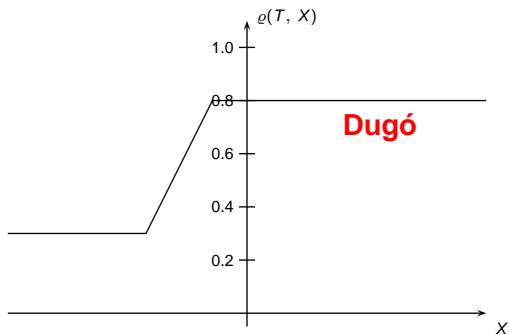
Nagy léptékben



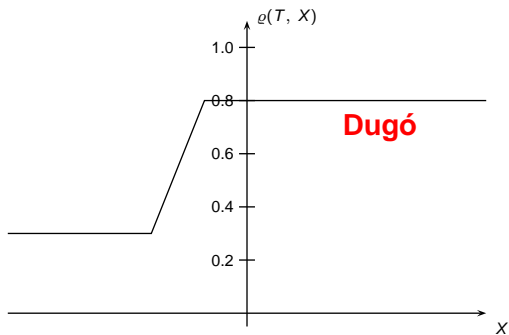
Nagy léptékben



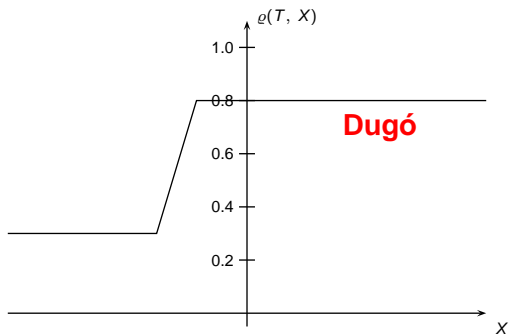
Nagy léptékben



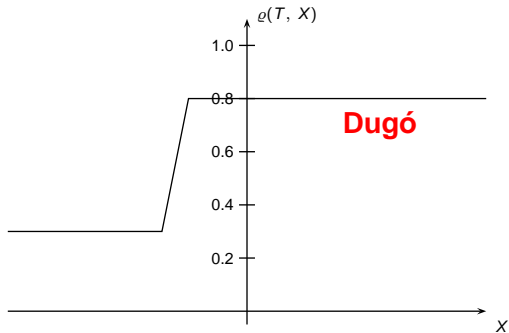
Nagy léptékben



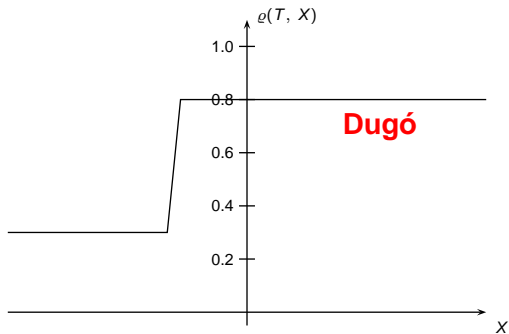
Nagy léptékben



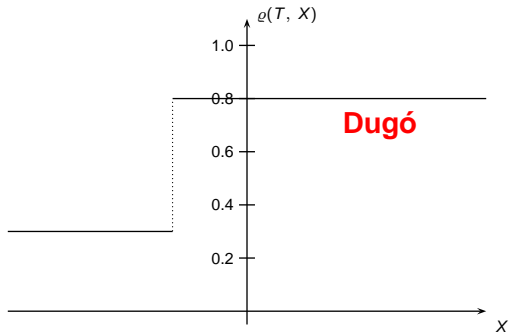
Nagy léptékben



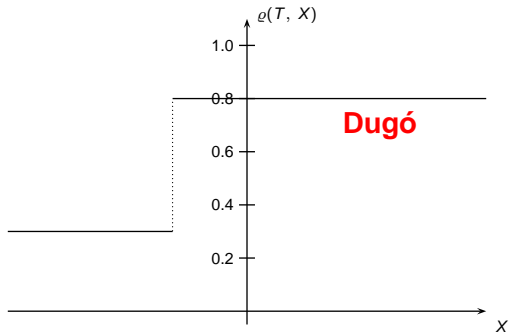
Nagy léptékben



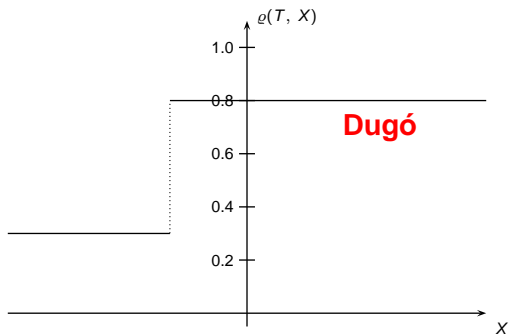
Nagy léptékben



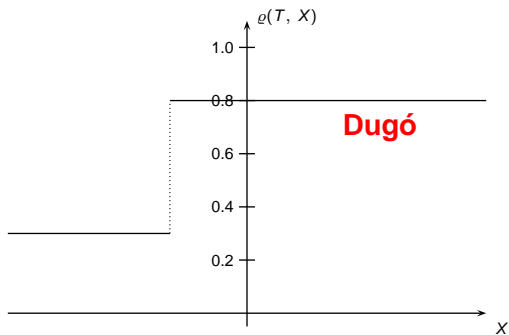
Nagy léptékben



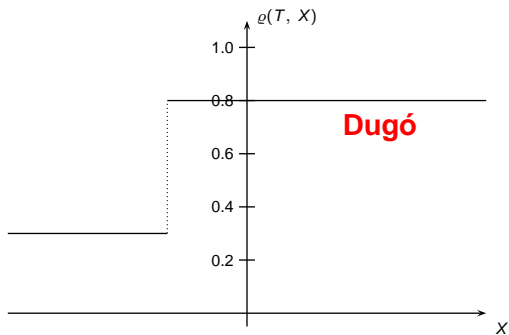
Nagy léptékben



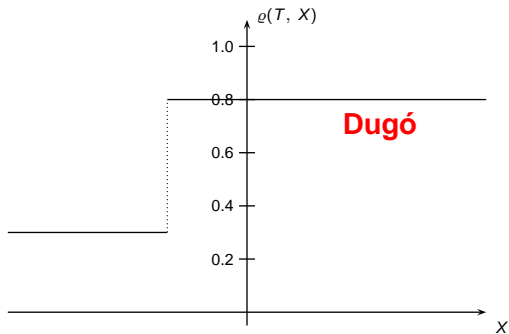
Nagy léptékben



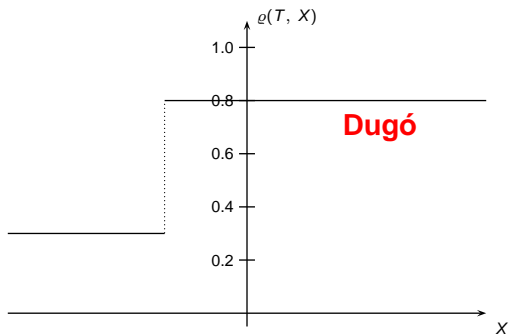
Nagy léptékben



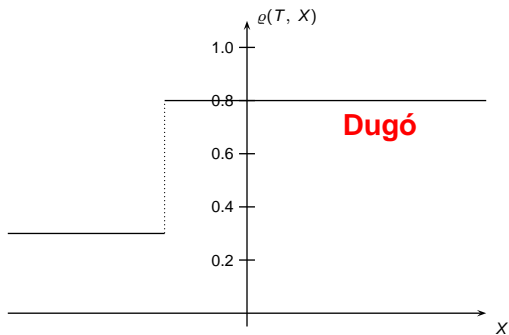
Nagy léptékben



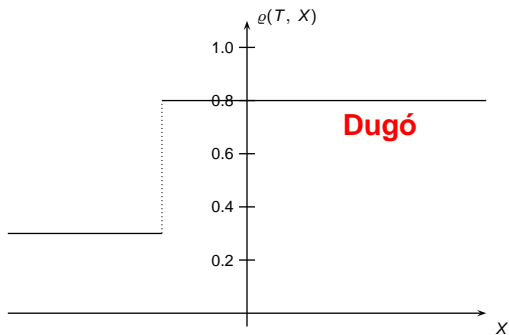
Nagy léptékben



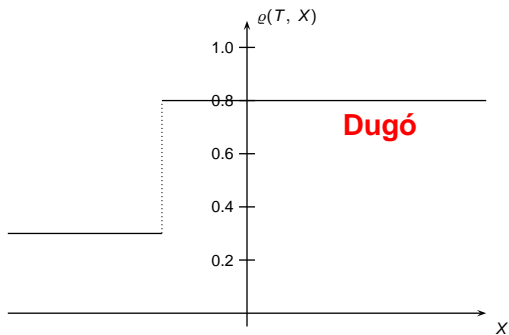
Nagy léptékben



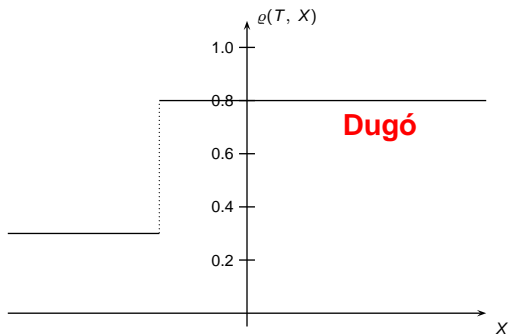
Nagy léptékben



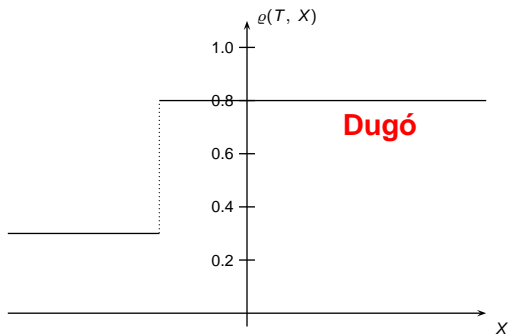
Nagy léptékben



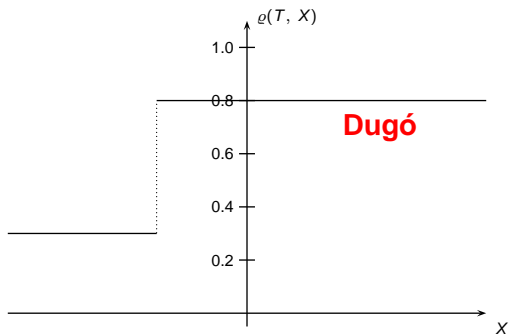
Nagy léptékben



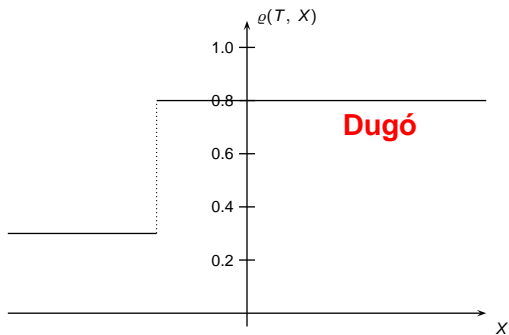
Nagy léptékben



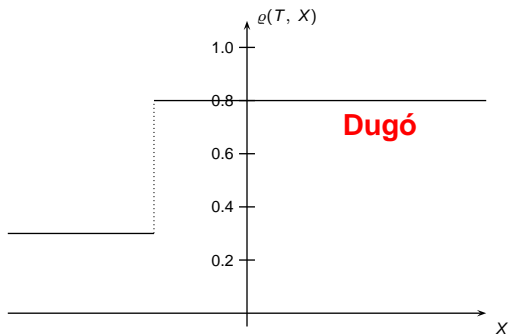
Nagy léptékben



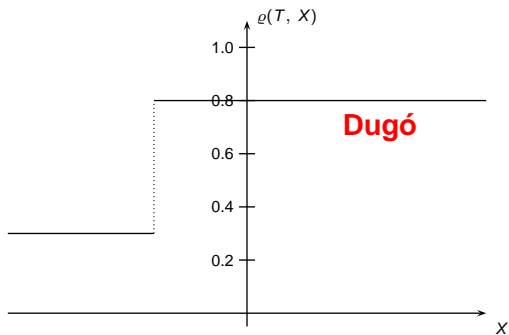
Nagy léptékben



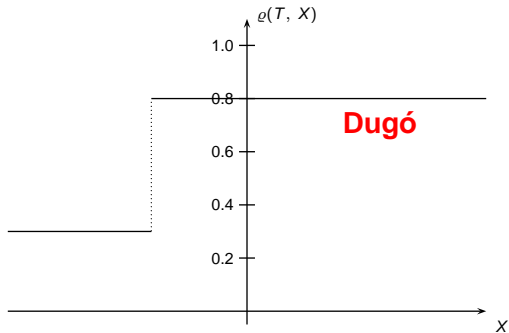
Nagy léptékben



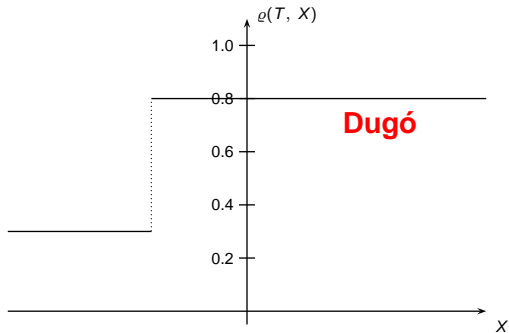
Nagy léptékben



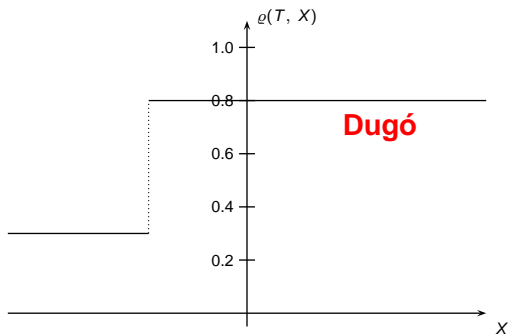
Nagy léptékben



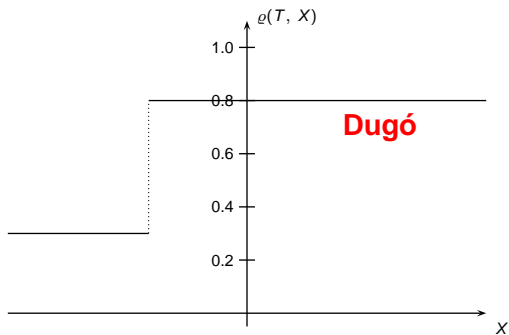
Nagy léptékben



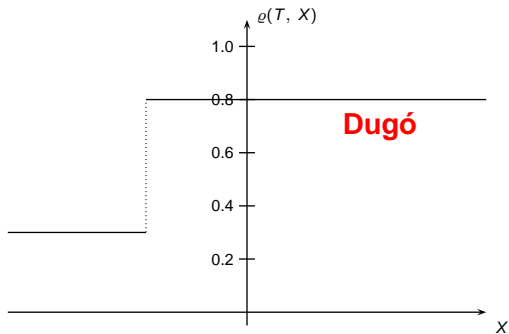
Nagy léptékben



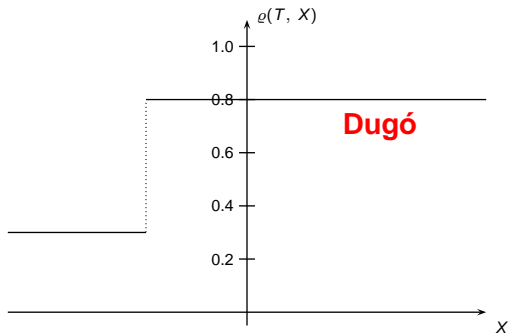
Nagy léptékben



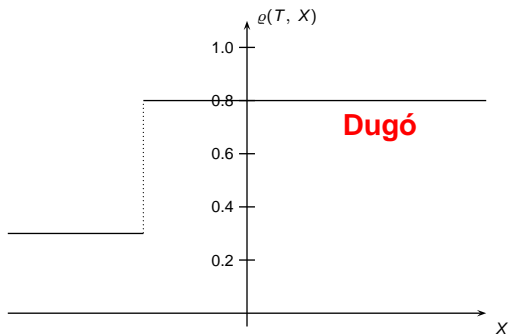
Nagy léptékben



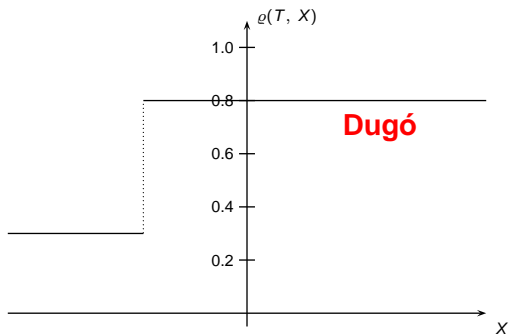
Nagy léptékben



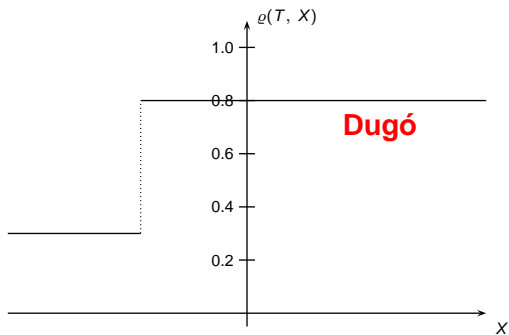
Nagy léptékben



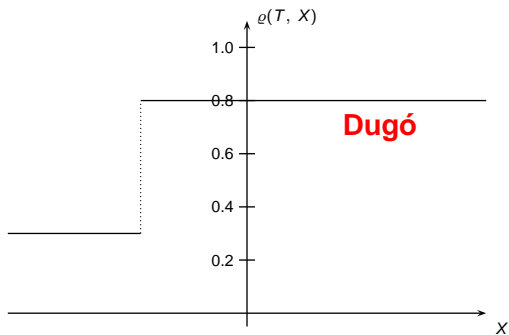
Nagy léptékben



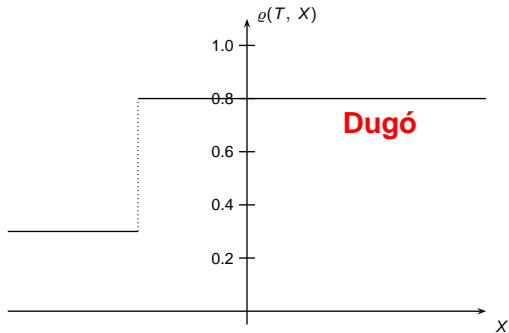
Nagy léptékben



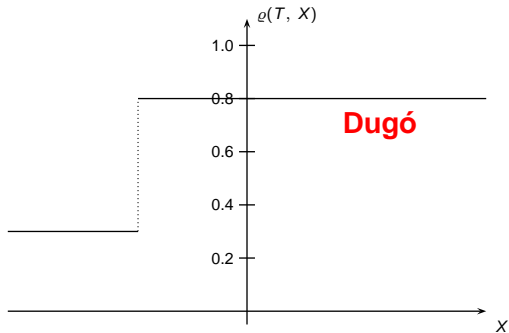
Nagy léptékben



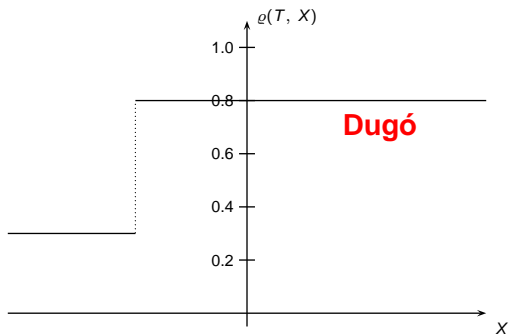
Nagy léptékben



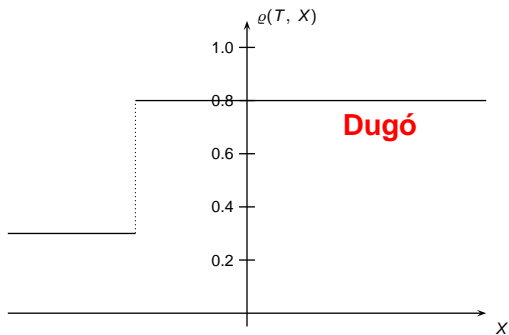
Nagy léptékben



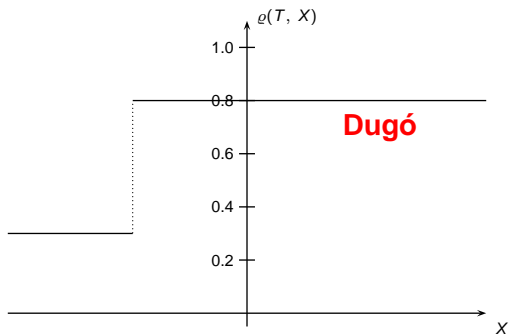
Nagy léptékben



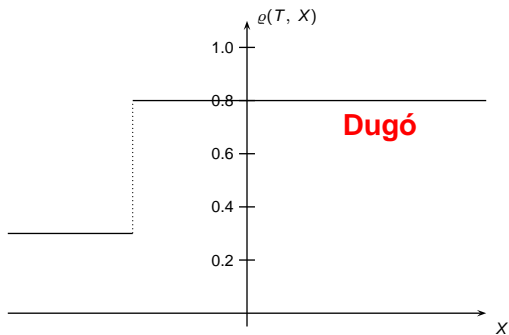
Nagy léptékben



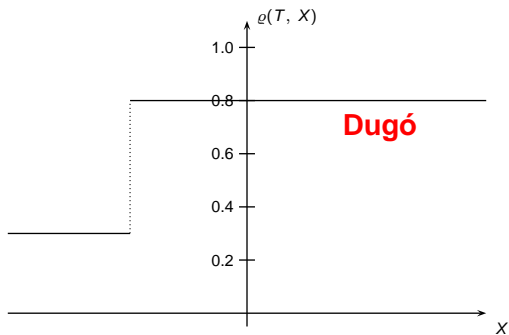
Nagy léptékben



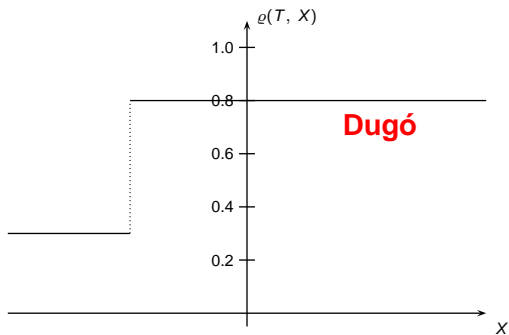
Nagy léptékben



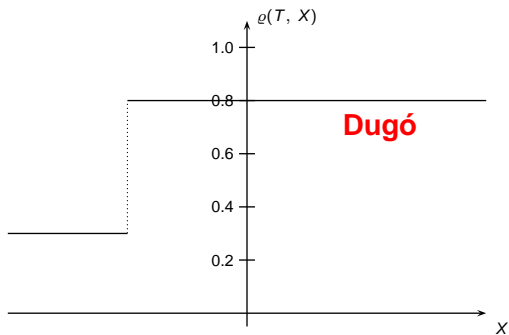
Nagy léptékben



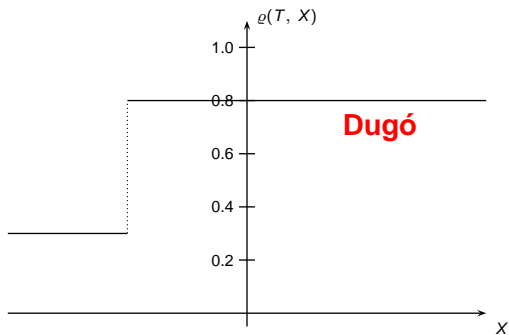
Nagy léptékben



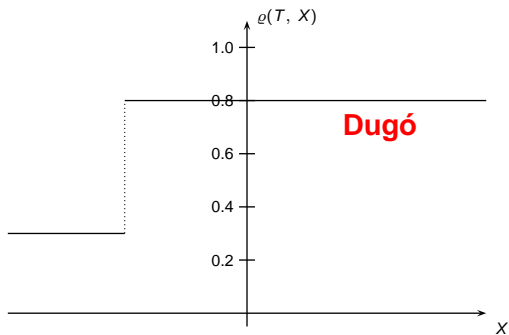
Nagy léptékben



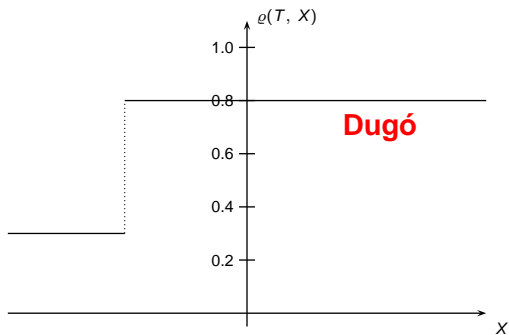
Nagy léptékben



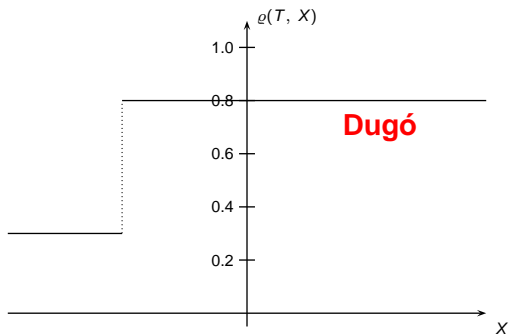
Nagy léptékben



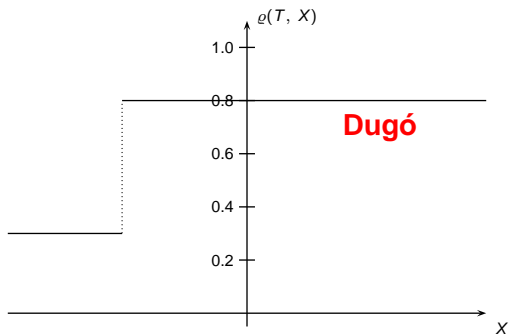
Nagy léptékben



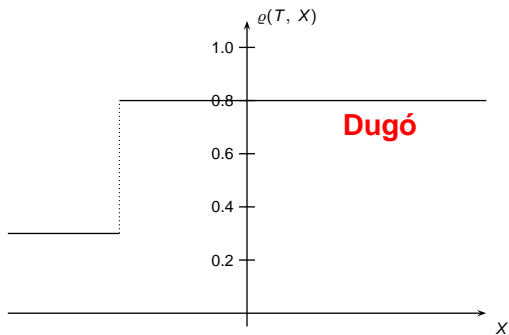
Nagy léptékben



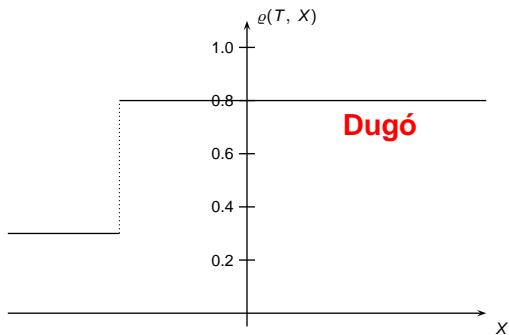
Nagy léptékben



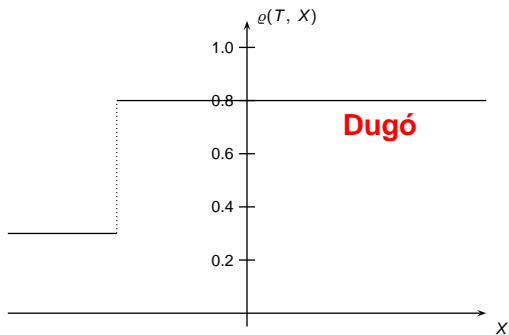
Nagy léptékben



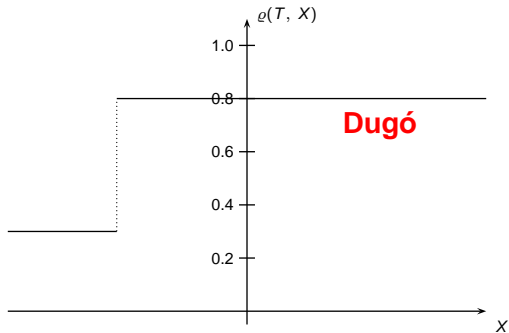
Nagy léptékben



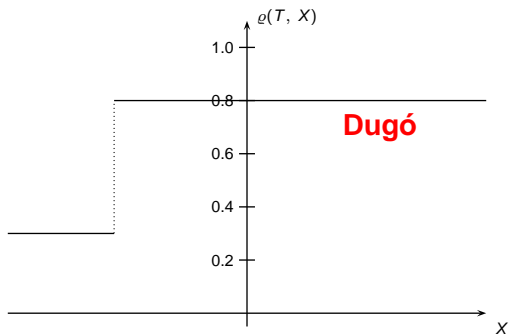
Nagy léptékben



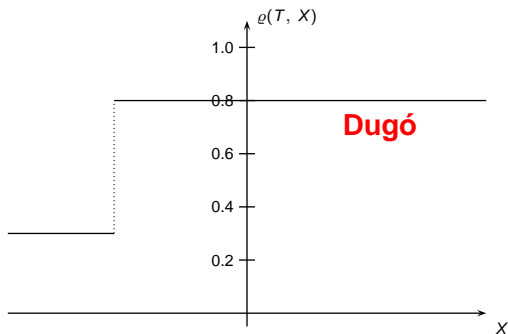
Nagy léptékben



Nagy léptékben

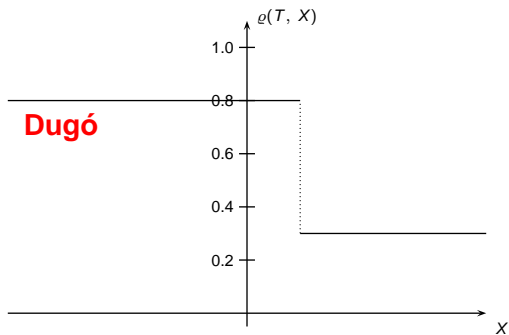


Nagy léptékben

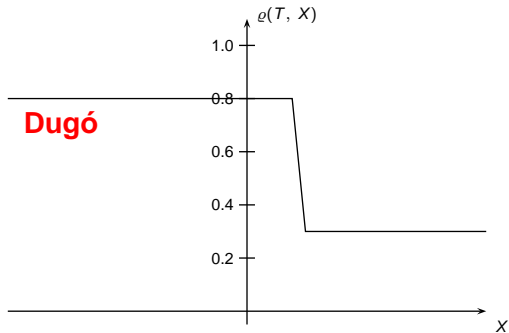


A dugó kezdete: **kiélesedik.**

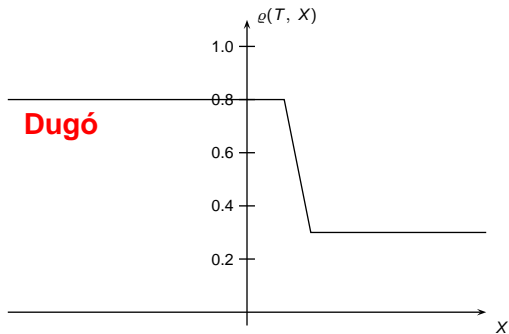
Nagy léptékben



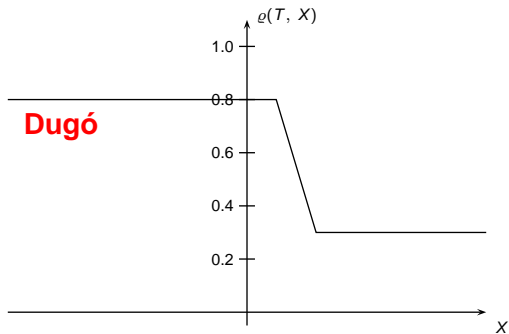
Nagy léptékben



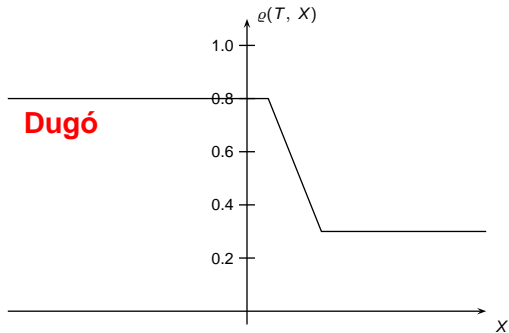
Nagy léptékben



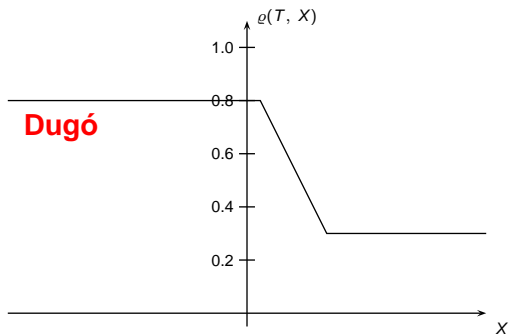
Nagy léptékben



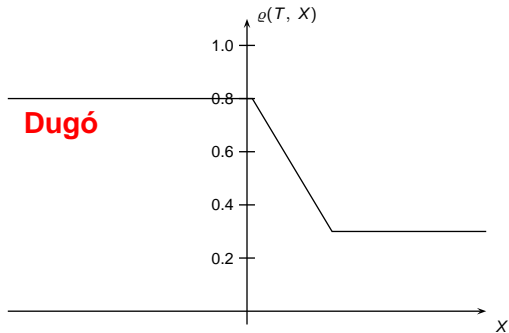
Nagy léptékben



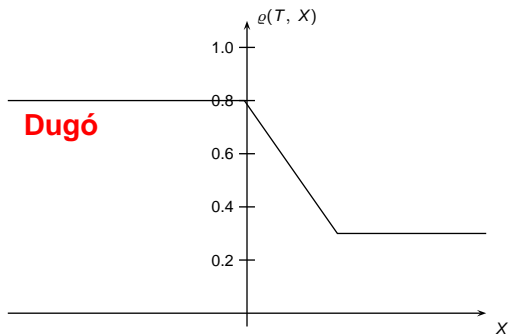
Nagy léptékben



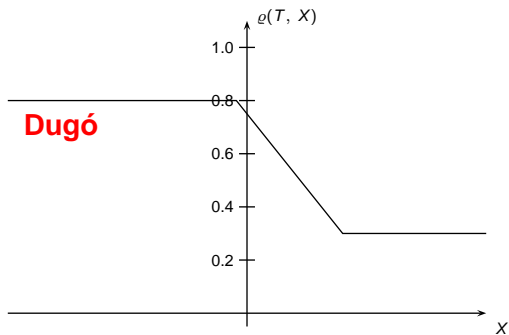
Nagy léptékben



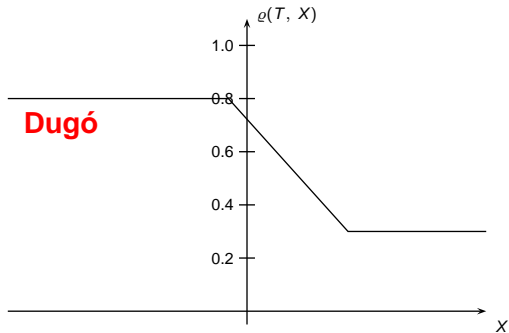
Nagy léptékben



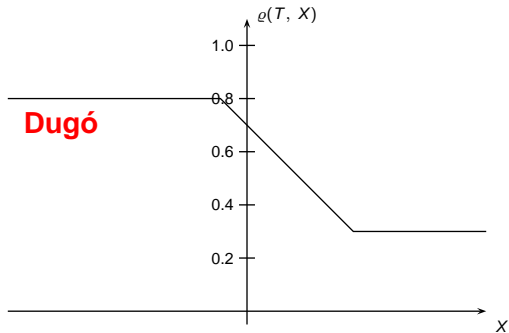
Nagy léptékben



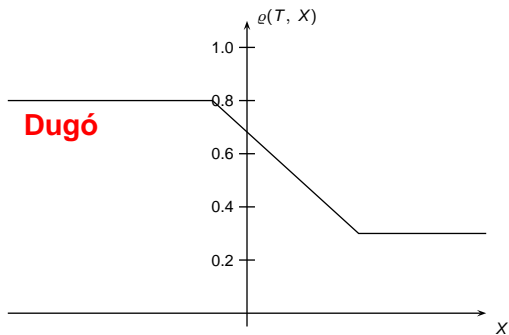
Nagy léptékben



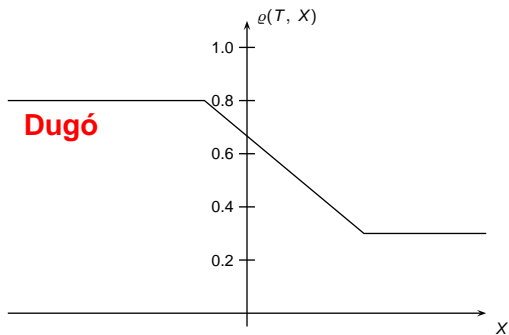
Nagy léptékben



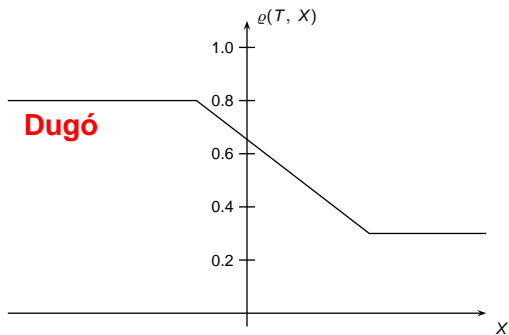
Nagy léptékben



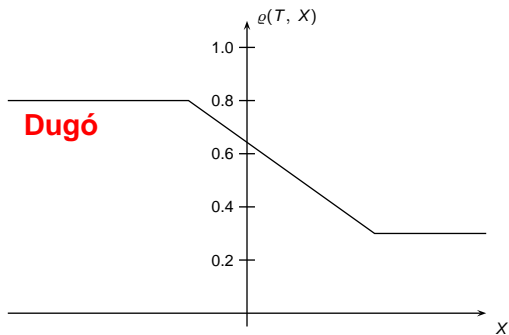
Nagy léptékben



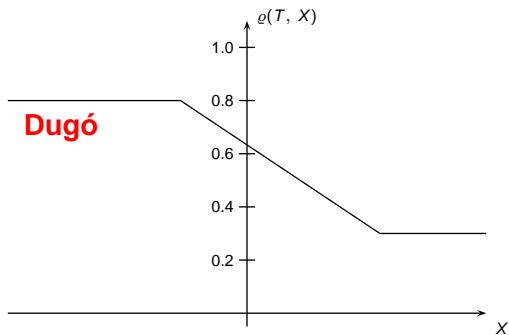
Nagy léptékben



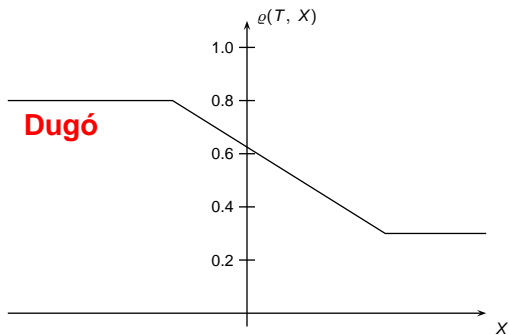
Nagy léptékben



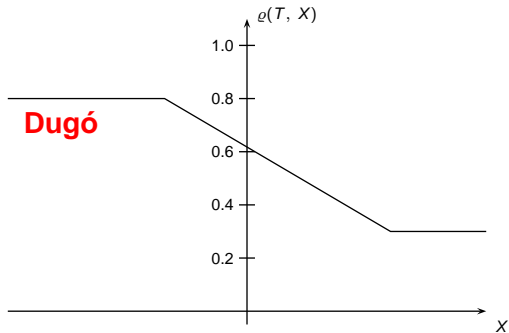
Nagy léptékben



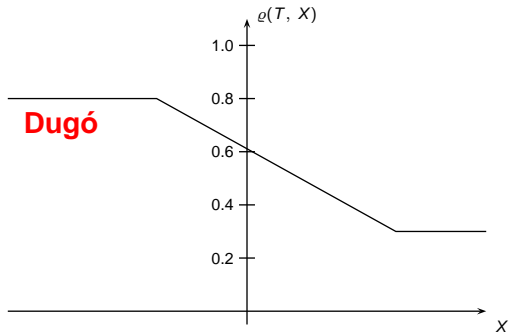
Nagy léptékben



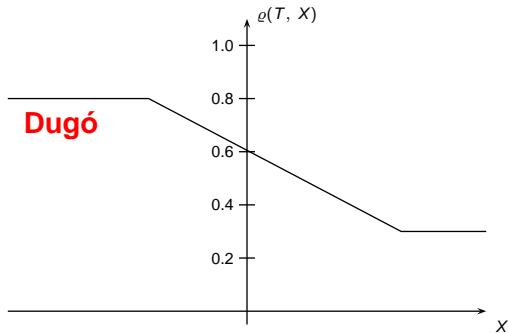
Nagy léptékben



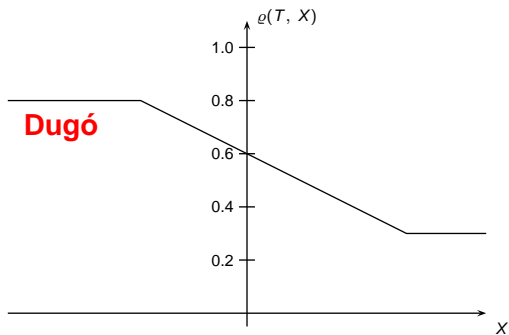
Nagy léptékben



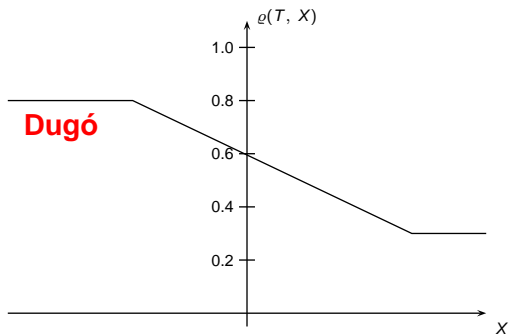
Nagy léptékben



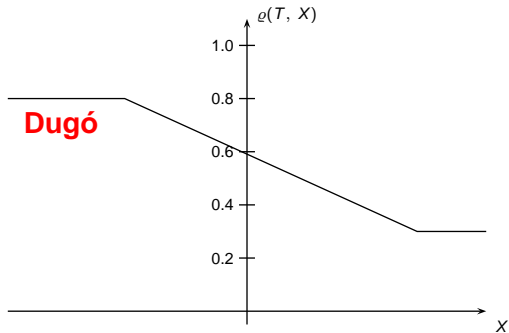
Nagy léptékben



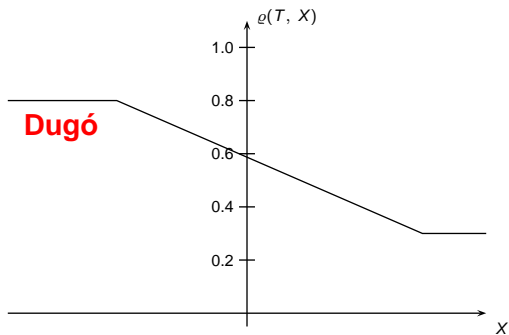
Nagy léptékben



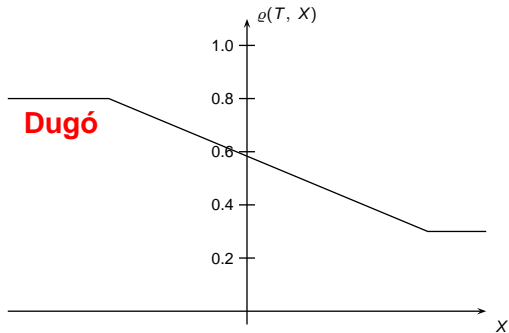
Nagy léptékben



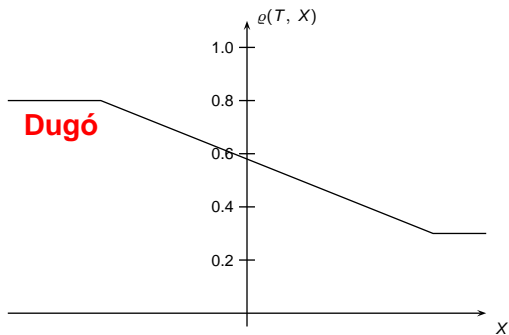
Nagy léptékben



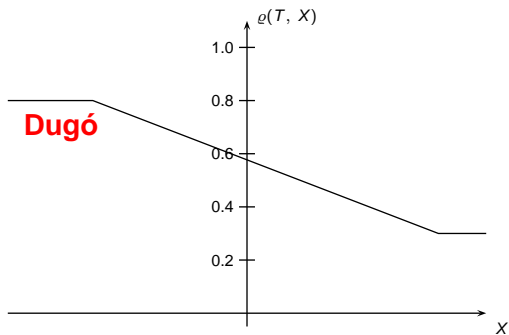
Nagy léptékben



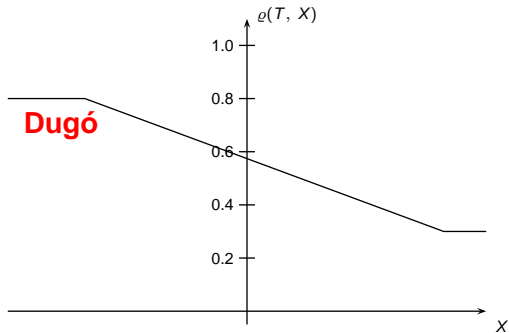
Nagy léptékben



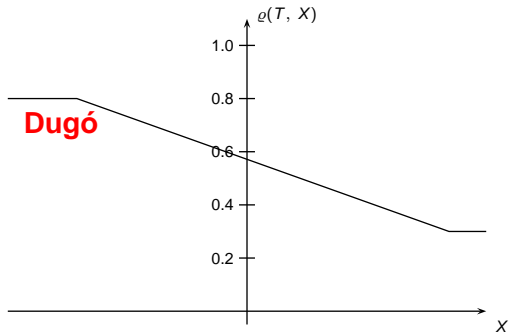
Nagy léptékben



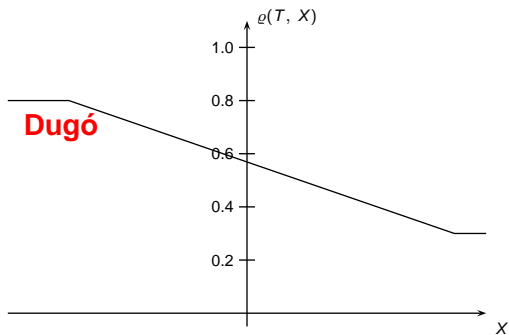
Nagy léptékben



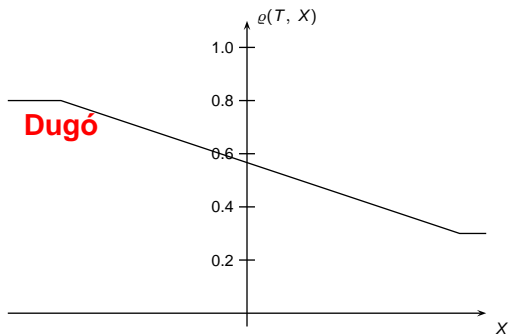
Nagy léptékben



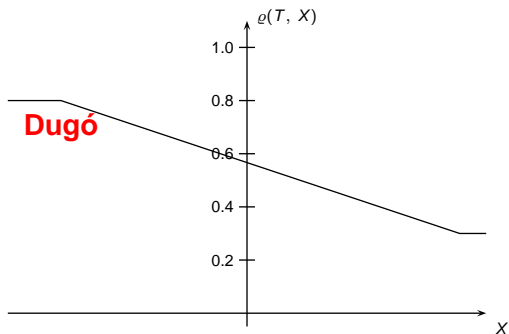
Nagy léptékben



Nagy léptékben



Nagy léptékben



A dugó vége: **kisimul.**

Megjegyzés

- ▶ Ennél sokkal kifinomultabb sztochasztikus modellek vannak a dugók modellezésére, melyeket nagyvárosokban is használnak

Megjegyzés

- ▶ Ennél sokkal kifinomultabb sztochasztikus modellek vannak a dugók modellezésére, melyeket nagyvárosokban is használnak
- ▶ Már a **TASEP** is rendkívül érdekes matematikailag, sok szép megválaszolt kérdéssel, és nehéz nyitott kérdésekkel.

Megjegyzés

- ▶ Ennél sokkal kifinomultabb sztochasztikus modellek vannak a dugók modellezésére, melyeket nagyvárosokban is használnak
- ▶ Már a **TASEP** is rendkívül érdekes matematikailag, sok szép megválaszolt kérdéssel, és nehéz nyitott kérdésekkel.

Köszönöm a figyelmet.