

Kizárásos folyamat: egy furcsa skálázás mikéntje

Timo Seppäläinennel közös munka

Balázs Márton

MTA-BME Sztochasztika Kutatócsoport
BME TTK Matematika Int., Sztochasztika Tsz.

Matematikai Tudományok Osztályának ülése
2012. október 17.

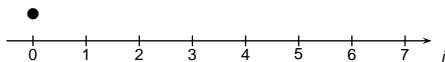
Egy egyszerű példa

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

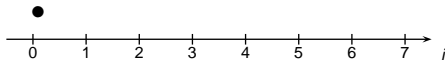
Egzotikus skálázás

Bizonyítás

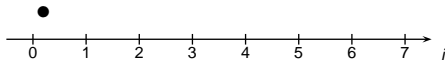
Egy egyszerű példa



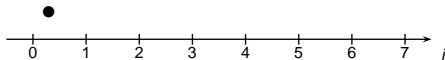
Egy egyszerű példa



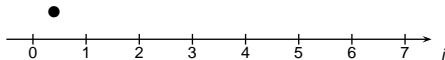
Egy egyszerű példa



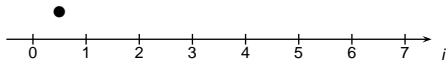
Egy egyszerű példa



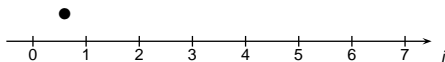
Egy egyszerű példa



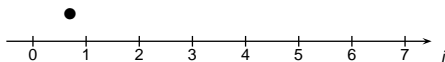
Egy egyszerű példa



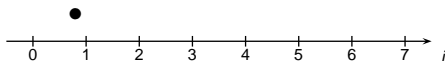
Egy egyszerű példa



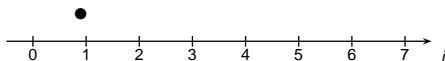
Egy egyszerű példa



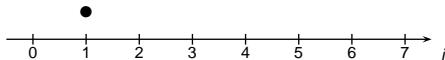
Egy egyszerű példa



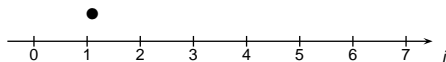
Egy egyszerű példa



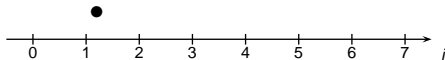
Egy egyszerű példa



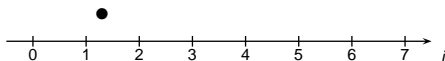
Egy egyszerű példa



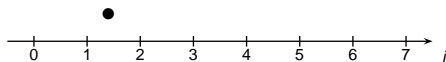
Egy egyszerű példa



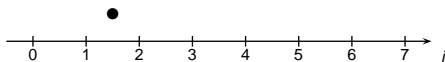
Egy egyszerű példa



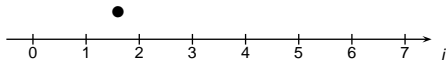
Egy egyszerű példa



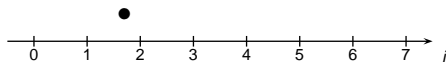
Egy egyszerű példa



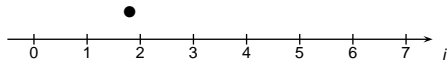
Egy egyszerű példa



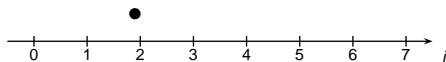
Egy egyszerű példa



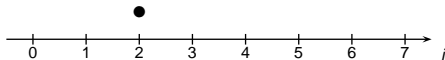
Egy egyszerű példa



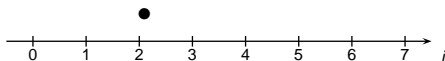
Egy egyszerű példa



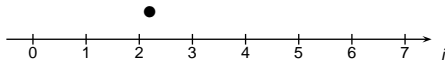
Egy egyszerű példa



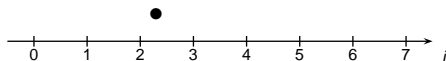
Egy egyszerű példa



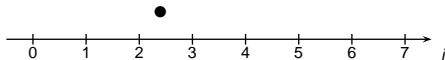
Egy egyszerű példa



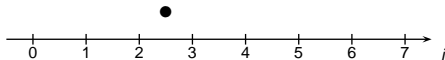
Egy egyszerű példa



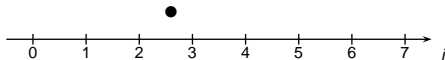
Egy egyszerű példa



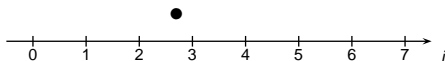
Egy egyszerű példa



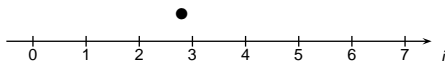
Egy egyszerű példa



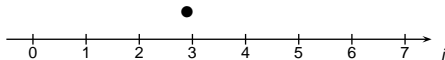
Egy egyszerű példa



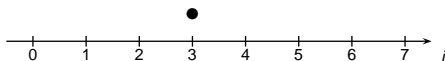
Egy egyszerű példa



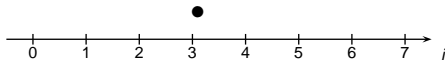
Egy egyszerű példa



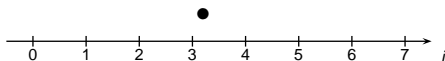
Egy egyszerű példa



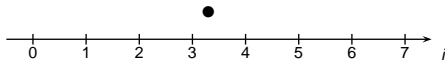
Egy egyszerű példa



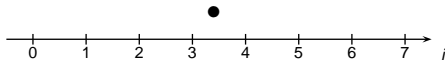
Egy egyszerű példa



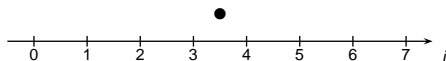
Egy egyszerű példa



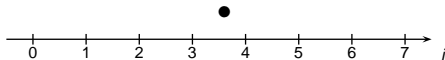
Egy egyszerű példa



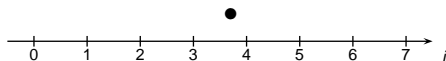
Egy egyszerű példa



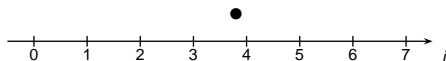
Egy egyszerű példa



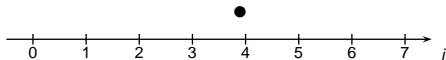
Egy egyszerű példa



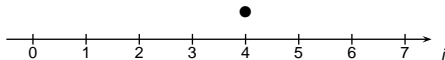
Egy egyszerű példa



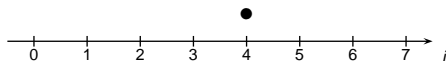
Egy egyszerű példa



Egy egyszerű példa

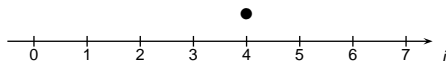


Egy egyszerű példa



$S(t)$ független $\text{Exp}(1)$ időnként ugrik egyet.

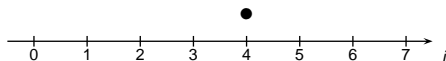
Egy egyszerű példa



$S(t)$ független $\text{Exp}(1)$ időnként ugrik egyet.

Folytonos idejű Markov ugró folyamat, **1 rátával**.

Egy egyszerű példa

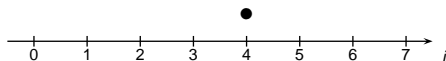


$S(t)$ független $\text{Exp}(1)$ időnként ugrik egyet.

Folytonos idejű Markov ugró folyamat, **1 rátával**.

NSzTv: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = 1$ m.b.

Egy egyszerű példa



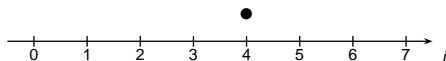
$S(t)$ független $\text{Exp}(1)$ időnként ugrik egyet.

Folytonos idejű Markov ugró folyamat, **1 rátával**.

NSzTv: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = 1$ m.b.

Fluktuáció: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D^2 S(t)}{t} = 1$.

Egy egyszerű példa



$S(t)$ független $\text{Exp}(1)$ időnként ugrik egyet.

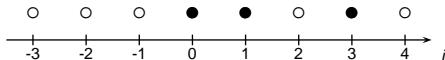
Folytonos idejű Markov ugró folyamat, **1 rátával**.

NSzTv: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = 1$ m.b.

Fluktuáció: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D^2 S(t)}{t} = 1$.

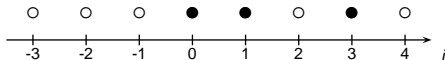
CHT is van: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t) - t}{\sqrt{t}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ϱ) eloszlás.

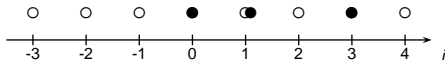
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

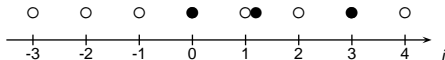
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

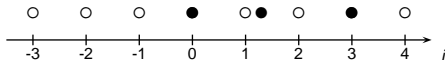
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

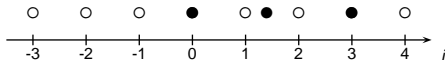
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

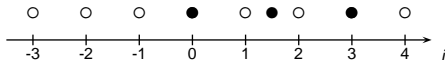
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

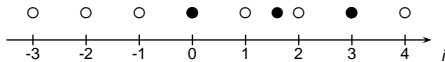
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

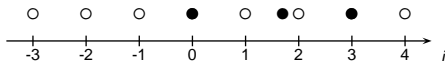
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

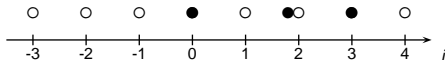
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

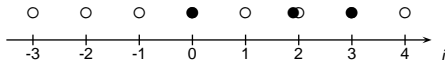
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

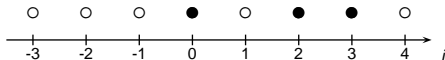
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

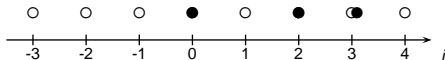
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

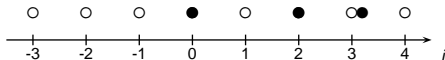
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

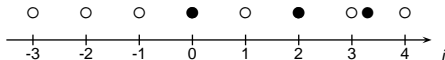
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

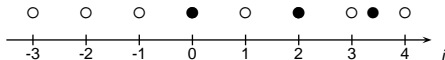
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

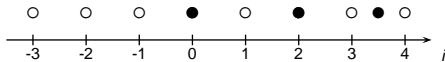
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

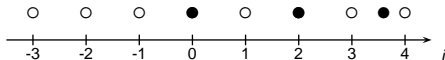
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

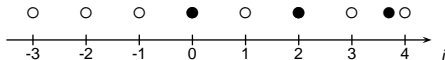
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

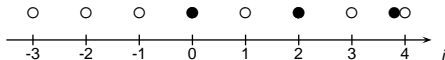
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

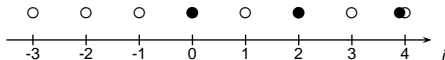
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

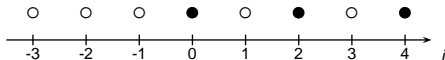
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

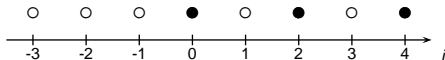
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

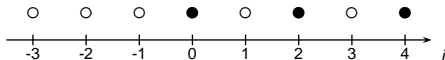
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

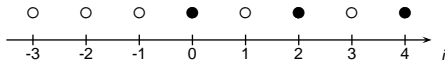
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

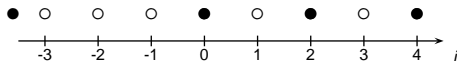
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

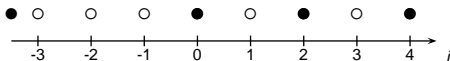
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

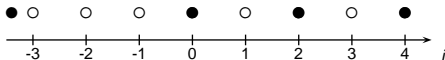
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

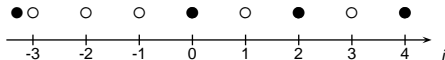
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

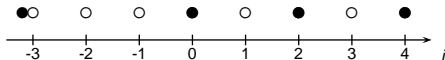
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

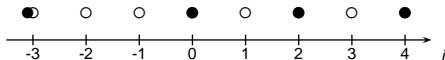
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

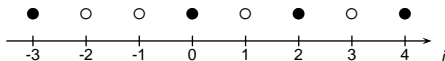
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

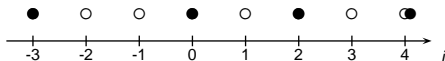
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

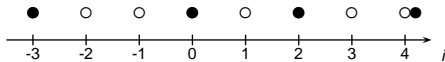
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

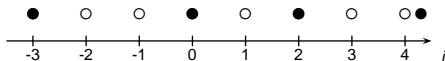
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

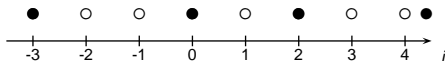
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

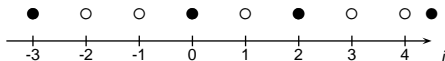
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

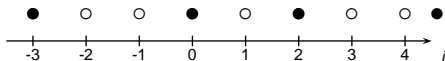
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

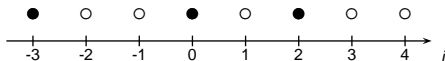
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

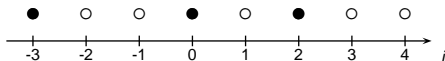
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

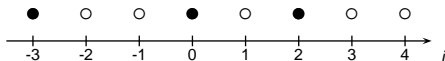
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

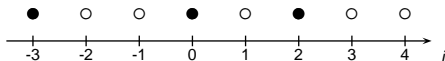
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

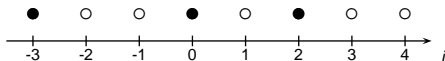
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ρ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat



Bernoulli(ϱ) eloszlás.

Részecskék jobbra ugranak 1 rátával,
De csak akkor, ha az érkezési helyen nincs másik részecske.

A Bernoulli(ϱ) eloszlás stacionárius (de nem reverzibilis)
minden $0 \leq \varrho \leq 1$ -re. Ezek a fontos stacionárius eloszlások.

Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Egy V sebességű megfigyelő az origóból indul.

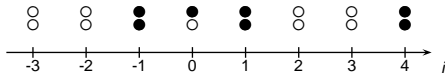
Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Egy V sebességű megfigyelő az origóból indul.

A számunkra érdekes mennyiség:

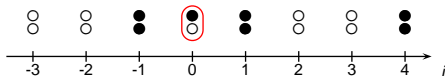
$$J_{V_t}(t) = \#\{\text{a megfigyelőt megelőző részecskék } t\text{-ig}\} \\ - \#\{\text{a megfigyelő által megelőzött részecskék } t\text{-ig}\}.$$

A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

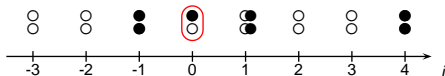
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

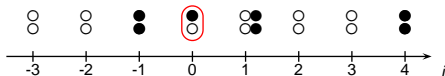
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

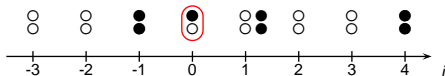
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

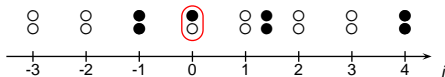
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

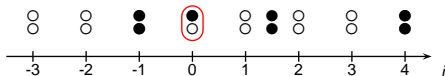
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

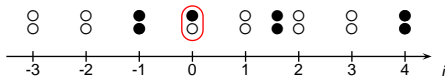
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

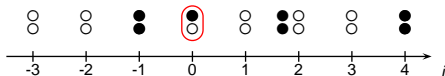
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

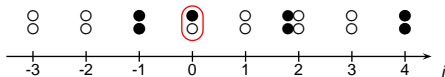
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

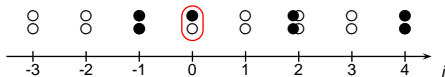
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

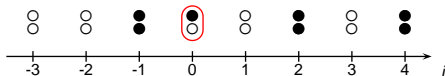
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

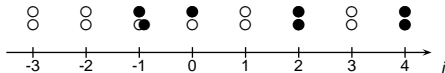
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

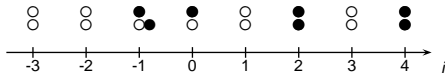
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

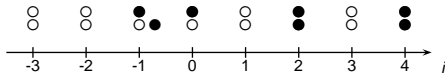
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

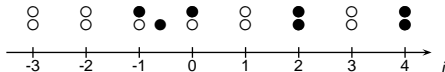
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

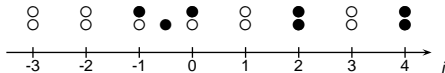
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

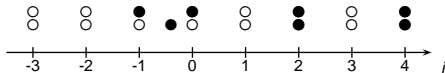
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

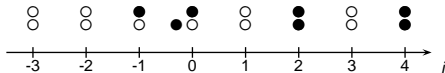
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

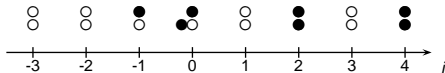
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

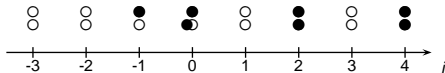
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

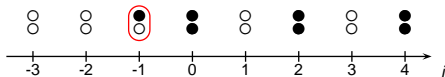
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

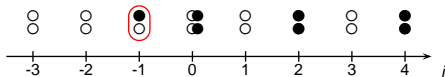
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

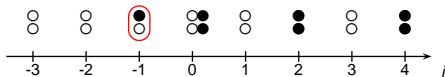
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

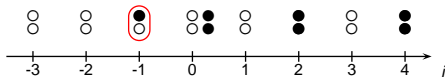
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

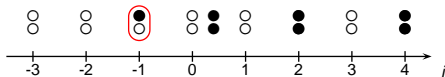
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

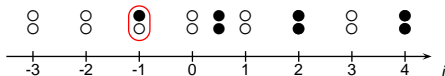
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

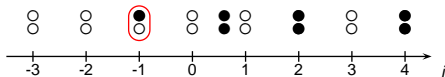
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

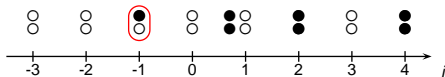
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

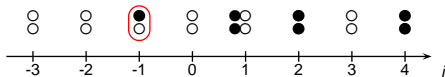
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

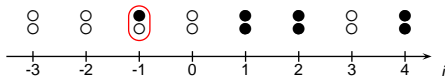
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

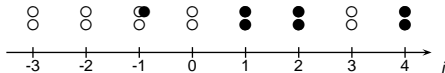
A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

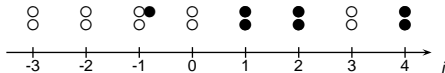
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

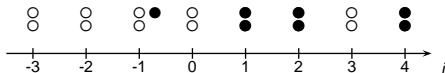
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

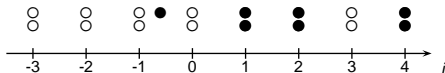
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

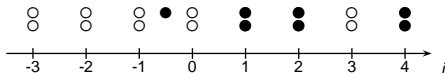
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

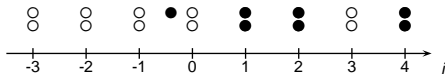
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

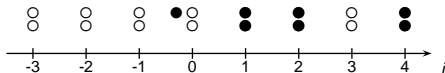
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

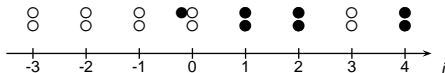
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

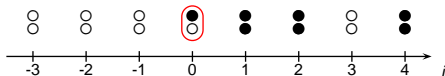
A másodosztályú részecske



Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

A másodosztályú részecske

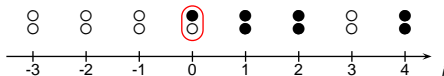


Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

Helye t -kor: $Q(t)$.

A másodosztályú részecske



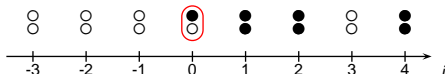
Sztocasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

Helye t -kor: $Q(t)$.

Sebessége: $\frac{\mathbf{E}Q(t)}{t} = 1 - 2\rho$

A másodosztályú részecske



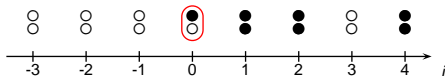
Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

Helye t -kor: $Q(t)$.

Sebessége: $\frac{\mathbf{E}Q(t)}{t} = 1 - 2\rho =$ karakterisztikus sebesség.

A másodosztályú részecske



Sztochasztikus csatolás: közös fejlődés, amennyire lehetséges

Másodosztályú részecske

Helye t -kor: $Q(t)$.

Sebessége: $\frac{\mathbf{E}Q(t)}{t} = 1 - 2\rho =$ karakterisztikus sebesség.

Ez az információterjedés sebessége.

Egzotikus skálázás

a $V = 1 - 2\rho$ karakterisztikán

Egzotikus skálázás

a $V = 1 - 2\rho$ karakterisztikán

Tétel (B. - Seppäläinen)

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}^2(J_{(1-2\rho)t}(t))}{t^{2/3}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}^2(J_{(1-2\rho)t}(t))}{t^{2/3}} < \infty.$$

Egzotikus skálázás

a $V = 1 - 2\rho$ karakterisztikán

Tétel (B. - Seppäläinen)

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}^2(J_{(1-2\rho)t}(t))}{t^{2/3}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}^2(J_{(1-2\rho)t}(t))}{t^{2/3}} < \infty.$$

Fontos előzmények: Cator és Groeneboom 2006, B., Cator és Seppäläinen 2006.

Egzotikus skálázás

B. - Komjáthy - Seppäläinen: tudjuk mi ezt még más modellekre is (zero range, kőműves folyamatok).

Egzotikus skálázás

B. - Komjáthy - Seppäläinen: tudjuk mi ezt még más modellekre is (zero range, kőműves folyamatok).

Funk.anal. módszerek: általánosabb kizárásos folyamatok (**Quastel és Valkó**).

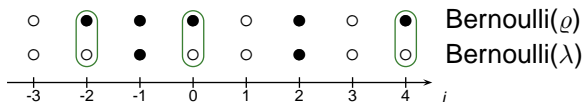
Egzotikus skálázás

B. - Komjáthy - Seppäläinen: tudjuk mi ezt még más modellekre is (zero range, kőműves folyamatok).

Funk.anal. módszerek: általánosabb kizárásos folyamatok (**Quastel és Valkó**).

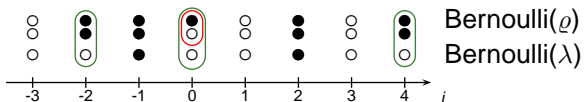
Határeloszlás RSK-megfeleléssel, Young tableaux-kkal, aszimptotikus analízissel (Tracy-Widom eloszlások; **Ferrari, Johansson, Prähofer, Spohn, Tracy, Widom, . . .**): last passage perkoláció, kizárásos foly., polinukleáris növekedés, Hammersley folyamat, polimer modellek; a módszer másra érzékeny, mint a mienk.

1. Sok másodosztályú részecske



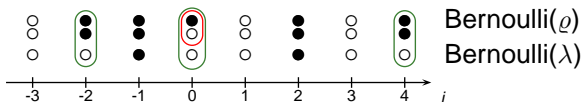
1. Sok másodosztályú részecske

Három modell csatolása:



1. Sok másodosztályú részecske

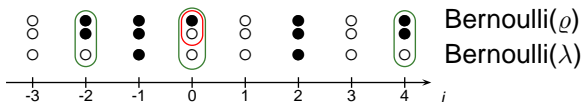
Három modell csatolása:



$$\begin{aligned}
 P_V\{Q(t) \geq (1 - 2\rho)t + u\} \\
 \leq \mathbf{P}\{J_{(1-2\rho)t+u}^\rho - J_{(1-2\rho)t+u}^\lambda \geq 0\}
 \end{aligned}$$

1. Sok másodosztályú részecske

Három modell csatolása:



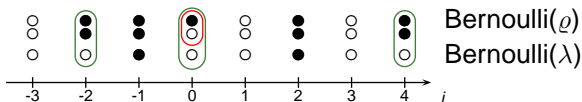
$$P_V\{Q(t) \geq (1 - 2\rho)t + u\}$$

$$\leq \mathbf{P}\{J_{(1-2\rho)t+u}^\rho - J_{(1-2\rho)t+u}^\lambda \geq 0\}$$

$$\leq \mathbf{P}\{\tilde{J}_{(1-2\rho)t+u}^\rho - \tilde{J}_{(1-2\rho)t+u}^\lambda \geq u(\rho - \lambda) - (\rho - \lambda)^2 t\}.$$

1. Sok másodosztályú részecske

Három modell csatolása:

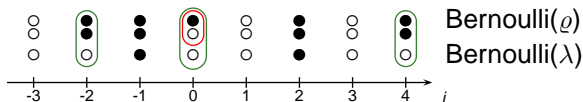


$$\begin{aligned}
 P_V\{Q(t) \geq (1 - 2\varrho)t + u\} \\
 &\leq \mathbf{P}\{J_{(1-2\varrho)t+u}^{\varrho} - J_{(1-2\varrho)t+u}^{\lambda} \geq 0\} \\
 &\leq \mathbf{P}\{\tilde{J}_{(1-2\varrho)t+u}^{\varrho} - \tilde{J}_{(1-2\varrho)t+u}^{\lambda} \geq u(\varrho - \lambda) - (\varrho - \lambda)^2 t\}.
 \end{aligned}$$

A jobb oldal maximális, ha $\lambda = \varrho - \frac{u}{2t}$.

1. Sok másodosztályú részecske

Három modell csatolása:



$$P_V\{Q(t) \geq (1 - 2\rho)t + u\}$$

$$\leq \mathbf{P}\{J_{(1-2\rho)t+u}^\rho - J_{(1-2\rho)t+u}^\lambda \geq 0\}$$

$$\leq \mathbf{P}\{\tilde{J}_{(1-2\rho)t+u}^\rho - \tilde{J}_{(1-2\rho)t+u}^\lambda \geq u(\rho - \lambda) - (\rho - \lambda)^2 t\}.$$

A jobb oldal maximális, ha $\lambda = \rho - \frac{u}{2t}$. Ezzel és egy Csebisev egyenlőtlenséggel

$$\mathbf{P}\{Q(t) \geq (1 - 2\rho)t + u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot \mathbf{D}^2(J_{(1-2\rho)t}^\rho(t)).$$

2. Egy kisebb algebrai csoda

Tétel (B. - Seppäläinen; ötletek Tóth B.-tól, H. Spohn-tól és M. Prähofer-től is)

$$\mathbf{D}^2(J_{(1-2\varrho)t}^{\varrho}(t)) = c \cdot \mathbf{E} |Q(t) - (1 - 2\varrho)t|.$$

2. Egy kisebb algebrai csoda

Tétel (B. - Seppäläinen; ötletek Tóth B.-tól, H. Spohn-tól és M. Prähofer-től is)

$$\mathbf{D}^2(J_{(1-2\varrho)t}^{\varrho}(t)) = c \cdot \mathbf{E}|Q(t) - (1 - 2\varrho)t|.$$

Ennek segítségével

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{Q(t) \geq (1 - 2\varrho)t + u\} &\leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot \mathbf{D}^2(J_{(1-2\varrho)t}^{\varrho}(t)) \\ &= c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot \mathbf{E}|Q(t) - (1 - 2\varrho) \cdot t|. \end{aligned}$$

3. A számolás

$$\tilde{Q}(t) := Q(t) - (1 - 2\varrho)t \quad \text{és} \quad E := \mathbf{E}|\tilde{Q}(t)|,$$

ezzel (és egy hasonló alsó eltérés korlással)

$$\mathbf{P}\{Q(t) \geq (1 - 2\varrho)t + u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot \mathbf{E}|Q(t) - (1 - 2\varrho) \cdot t|$$

$$\mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

3. A számolás

$$\tilde{Q}(t) := Q(t) - (1 - 2\varrho)t \quad \text{és} \quad E := \mathbf{E}|\tilde{Q}(t)|,$$

ezzel (és egy hasonló alsó eltérés korláttal)

$$\mathbf{P}\{Q(t) \geq (1 - 2\varrho)t + u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot \mathbf{E}|Q(t) - (1 - 2\varrho) \cdot t|$$

$$\mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

Ebből már kijön a $t^{2/3}$ felső korlát:

3. A számolás

$$\mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

3. A számolás

$$\mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

$$E = \mathbf{E}|\tilde{Q}(t)| = \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > u\} du$$

3. A számolás

$$\mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

$$\begin{aligned} E = \mathbf{E}|\tilde{Q}(t)| &= \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > u\} du \\ &= E \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > vE\} dv \end{aligned}$$

3. A számolás

$$\mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

$$\begin{aligned} E = \mathbf{E}|\tilde{Q}(t)| &= \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > u\} du \\ &= E \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > vE\} dv \\ &\leq E \int_{1/2}^\infty \mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > vE\} dv + \frac{1}{2}E \end{aligned}$$

3. A számolás

$$\mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{E}|\tilde{Q}(t)| = \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > u\} du \\ &= E \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > vE\} dv \\ &\leq E \int_{1/2}^\infty \mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > vE\} dv + \frac{1}{2}E \\ &\leq c \cdot \frac{t^2}{E^2} + \frac{1}{2}E, \end{aligned}$$

azaz: $E^3 \leq c \cdot t^2$.

3. A számolás

$$\mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > u\} \leq c \cdot \frac{t^2}{u^4} \cdot E.$$

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{E}|\tilde{Q}(t)| = \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > u\} du \\ &= E \int_0^\infty \mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > vE\} dv \\ &\leq E \int_{1/2}^\infty \mathbf{P}\{|\tilde{Q}(t)| > vE\} dv + \frac{1}{2}E \\ &\leq c \cdot \frac{t^2}{E^2} + \frac{1}{2}E, \end{aligned}$$

azaz: $E^3 \leq c \cdot t^2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2(J_{(1-2\varrho)t}(t)) &\stackrel{\text{Tétel}}{=} \text{konst.} \cdot \mathbf{E}|Q(t) - (1 - 2\varrho)t| \\ &= \text{konst.} \cdot E \leq c \cdot t^{2/3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Köszönöm a figyelmet.