Véges csoportok mint belső szimmetriák kvantumtérelméleti rács modellekben

Balázs Márton V. fizikus, ELTE TTK

Témavezető: Szlachányi Kornél, KFKI RMKI

Bevezetés

A fizikában rendkívül fontos a csoportok szerepe, általában szimmetriák felírásánál. A szimmetriák gyakran leszűkítik elméleti lehetőségeinket, így segítve új elméletek keresésének irányát, egyszerűbbé teszik számolásainkat, sőt néha konkrét jóslatok alapját is adják. Nincs ez másképp a kvantumtérelméletekben sem. Ezeket az elméleteket sokszor relativisztikus alakban fogalmazzuk meg, így már felírásukkor megjelenik a Poincaré-csoport, mint alapvető szimmatriacsoport (illetve néha ennek alacsonyabb dimenziós megfelelői). Az elméletek egy másik jelentős részét adják a konform térelméletek, melyekben a Poincaré-csoport helyett két dimenziós konform csoportok jelennek meg.

Új jelenségek leírásánál bizonyos belső szimmetriák segítenek a tapasztalatok értelmezésében, osztályozásában, kezelhetővé téve kísérleti eredményeinket. Természetesen ezen szimmetriák később megjelennek a jelenségre kidolgozott elméletekben is. Ilyenek például az izospin, a paritás, a töltéskonjugáció, a lepton- és barionszámmegmaradás. A jelenségek hátterét leíró mértékelméleti leírásokban pedig mértékszimmetriák jelennek meg, alapját adva az elmélet felépítésének.

Ebben a dolgozatban a szuperszelekciós szektorok (??) elméletében fontos szerepet játszó néhány alapfogalmat ismerhetünk meg. Ezeket a fogalmakat rácsmodellek példáján keresztül mutatjuk be. Vizsgáljuk ezen modellekben véges szimmetriák hatását, valamint az e hatásokra invariáns (azaz szimmetrikus) kombinációkat. Két modellel foglalkozunk: az első egy egy dimenziós Ising-spin modell, melyben a szimmetriacsoportnak a Z_2 két elemű csoport felel meg, másik modellünk pedig egy hasonló algebrára épülő spin-modell, melyen az S_3 csoport hat (ennek két generátora egy harmadrendű forgatásnak illetve egy tükrözésnek felel meg). Bár a dolgozatban csak véges csoportok fordulnak elő, a bemutatott módszerek alkalmasak Hopf-algebrai vagy általánosabb szimmetriájú modellek tanulmányozására is.

A dolgozat első részében rövid áttekintést nyújtunk a felhasznált matematikai apparátusról. Így az első fejezet a véges csoportok általános tulajdonságairól és ábrázolásukról szól, a második fejezetben az ábrázolások és a közöttük való áttérések rendszerezéséről esik szó. Az itt bemutatott fogalmakat a harmadik fejezetben az S_3 csoporton mutatjuk be, eljutva egy fontos egyértelműségi állításhoz e csoport ábrázolási rendszerének struktúrájával kapcsolatban. A második részben rácstérelméleti alkalmazásokról esik szó. A negyedik fejezetben e véges csoportok szimmetriaként való felírásának módját vizsgáljuk rácstérelméletek operátoralgebráján. Az ötödik fejezetben az Ising-spin modellen, a hatodik fejezetben pedig egy hasonló algebrán felírt S_3-spin modellen mutatjuk be eddig felépített fogalmainkat. A szimmetriák hatásának felírásán túl megkeressük e modellekben a szimmetriatranszformációkra invariáns ún. megfigyelhető részét a modellek operátoralgebrájának.

1. Véges csoportok

Ebben a fejezetben néhány szükséges alapismeretet foglalunk össze a véges csoportokkal és ábrázolásaikkal kapcsolatban. Az itt szereplő levezetések közül néhány egyszerűbb önnállóan lett kidolgozva, az állítások egy részének bizonyítását viszont nem közöljük.

1.1. A csoportalgebra

1.1.1 **Definíció.** A $(\mathcal{G}, \cdot)$ párt *csoportnak* nevezzük, ha $\mathcal{G}$ halmaz, $\cdot$ pedig egy asszociatív, egységelemes és inverzelemes művelet rajta.

A továbbiakban általában véges csoportokkal ($\mathrm{Card}(\mathcal{G}) \in \mathbb{N}$) foglalkozunk. A csoport tulajdonságain túl célszerű bevezetni elemeinek számmal való szorzását és összeadását is.

1.1.2 **Definíció.** A $\mathbb{C}\mathcal{G}$ *csoportalgebra* a csoport elemeinek komplex lineárkombinációja a következő tulajdonságokkal ($g, g' \in \mathcal{G}$; $c_1(g), c_2(g) \in \mathbb{C}$): ha $\mathbb{C}\mathcal{G} \ni a_1 = \sum_g c_1(g)g$ és $\mathbb{C}\mathcal{G} \ni a_2 = \sum_g c_2(g)g$, akkor

(i) $a_1 + a_2 = \sum_g \big(c_1(g) + c_2(g)\big)g$;

(ii) $a_1 \cdot a_2 = \sum_{g,g'} c_1(g)c_2(g)g \cdot g'$.

1.2. Modulusok

1.2.1 **Definíció.** Legyen $(\mathcal{G}, \cdot)$ csoport, $(V, +)$ pedig kommutatív csoport (például V lehet egy vektortér). Ekkor ${}_{\mathcal{G}}V : \mathcal{G} \times V \to V$; $(g, v) \mapsto gv$ *bal* $\mathcal{G}$*-modulus* V*-n*, ha minden $g, h \in \mathcal{G}$; $v, u \in V$-re és az $e \in \mathcal{G}$ csoportegységre

(i) $(g \cdot h)v = g(hv)$;

(ii) $ev = v$;

(iii) $g(u + v) = gu + gv$.

Szokták a csoport-modulust csoport-ábrázolásnak is hívni. Célszerű volna ezt az ábrázolást kiterjeszteni a csoportalgebrára is. Ehhez definiáljuk a gyűrű majd az algebra fogalmát, illetve ezek hatását a $(V, +)$ kommutatív csoporton.

1.2.2 **Definíció.** $\mathcal{R}$ a rajta értelmezett szorzás és összeadás műveletekkel *gyűrű*, ha $(\mathcal{R}, +)$ kommutatív csoport, és minden $r, s, t \in \mathcal{R}$ elemre

(i) $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$;

(ii) $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$;

(iii) $(s + t) \cdot r = s \cdot r + t \cdot r$.

A továbbiakban *egységelemes gyűrűről* fogunk beszélni, ahol tehát létezik $\mathbf{1} \in \mathcal{R}$, melyre $\mathbf{1} \cdot r = r \cdot \mathbf{1} = r$.

1.2.3 **Definíció.** Legyen $\mathcal{R}$ gyűrű, $(V, +)$ pedig kommutatív csoport. Egy ${}_{\mathcal{R}}V : (\mathcal{R} \times V) \to V$; $(r, v) \mapsto rv$ leképzést *bal* $\mathcal{R}$*-modulusnak* hívunk, ha minden $r, s \in \mathcal{R}$; $u, v \in V$ elemre és az $\mathbf{1} \in \mathcal{R}$ egységre

(i) $(r + s)v = rv + sv$;

(ii) $r(u + v) = ru + rv$;

(iii) $r(sv) = (r \cdot s)v$;

(iv) $\mathbf{1}v = v$.

1.2.4 **Definíció.** Legyenek $\mathcal{R}$ és $\mathcal{A}$ gyűrűk, $\mathcal{R}$ kommutatív. Az $\mathcal{A}$ gyűrű *centruma* $\mathrm{Centr}(\mathcal{A}) := \{z \in \mathcal{A} \mid (\forall a \in \mathcal{A})\ a \cdot z = z \cdot a\}$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ *algebra* $\mathcal{R}$ *felett*, ha adva van egy $i : \mathcal{R} \to \mathrm{Centr}(\mathcal{A})$ nem nulla és egységőrző (azaz $i : \mathbf{1}_{\mathcal{R}} \mapsto \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$) gyűrű-homomorfizmus.

1.2.5 **Megjegyzés.** Gyakran előfordul, hogy az $\mathcal{R}$ gyűrű egyben test is (például $\mathcal{R} = \mathbb{C}$). Ekkor az előbbi i homomorfizmus szükségképpen injektív, azaz $r \neq 0$-ra $i(r) \neq 0$. Ugyanis $i(r) = 0$ és $r \neq 0$ esetén r^{-1} létezése miatt $0 = i(r^{-1}) \cdot i(r) = i(r^{-1} \cdot r) = i(\mathbf{1}_{\mathcal{R}})$ teljesülne, ezt pedig kizárja i egységőrző tulajdonsága.

1.2.6 **Definíció.** Legyen $\mathcal{A}$ algebra az $\mathcal{R}$ gyűrű felett, V pedig egy bal $\mathcal{R}$-modulus. V-t *bal algebramodulusnak* hívjuk az $\mathcal{A}$ algebra felett, ha V bal modulus az $\mathcal{A}$ gyűrű felett is úgy, hogy az $\mathcal{A}$- és $\mathcal{R}$-hatás az i homomorfizmussal *kompatibilis*: $(\forall r \in \mathcal{R}, v \in V)\ \ rv = i(r)v$. Ha i injektív (például $\mathcal{R}$ test volta miatt), akkor ez egyszerűen azt jelenti, hogy az $\mathcal{R}$-beli skalárokkal való szorzás kiterjed az $\mathcal{A}$-beli skalárokra is.

A következőkben $\mathcal{B}$ alatt a csoport, gyűrű vagy algebra egyikét, a ${}_{\mathcal{B}}V$ moduluson pedig a megfelelő csoport-, gyűrű-, vagy algebramodulus egyikét értjük.

1.2.7 **Definíció.** Legyen $(V_1, +)$ és $(V_2, +)$ két kommutatív csoport. A *direktösszegük* $(V_1 \oplus V_2, +)$ a $V_1 \times V_2$ halmaz, ellátva a

$$+\ :\ V_1 \oplus V_2\ \times\ V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2\ ;\ \big((u_1 \oplus u_2), (v_1 \oplus v_2)\big) \mapsto \big((u_1 + v_1) \oplus (u_2 + v_2)\big)$$

művelettel, így $(V_1 \oplus V_2, +)$ is kommutatív csoport.
A ${}_{\mathcal{B}}V_1$ és ${}_{\mathcal{B}}V_2$ *modulusok direktösszege*

$${}_{\mathcal{B}}V_1 \oplus {}_{\mathcal{B}}V_2\ :\ (\mathcal{B}, V_1 \oplus V_2) \to V_1 \oplus V_2\ ;\ (b, v_1 \oplus v_2) \mapsto bv_1 \oplus bv_2\ \ ,$$

szintén modulus.
A ${}_{\mathcal{B}}V$ modulus *részmodulusa* a ${}_{\mathcal{B}}V_1$ modulus, ha $V_1 \subset V$.

1.2.8 **Definíció.** A ${}_{\mathcal{B}}V$ modulus *egyszerű* vagy *irreducibilis*, ha nincs nemtriviális részmodulusa.

1.2.9 **Definíció.** A ${}_{\mathcal{B}}V$ modulus *indekomponálható*, ha minden ${}_{\mathcal{B}}V_1$ és ${}_{\mathcal{B}}V_2$ modulusra ${}_{\mathcal{B}}V$ és ${}_{\mathcal{B}}V_1 \oplus {}_{\mathcal{B}}V_2$ ekvivalenciájából ${}_{\mathcal{B}}V_1 = 0$ vagy ${}_{\mathcal{B}}V_2 = 0$ (azaz $(V_1, +)$ vagy $(V_2, +)$ triviális, egy elemű csoport) következik. Ekkor tehát ${}_{\mathcal{B}}V$ nem bontható fel nemtriviális direktösszegre.

1.2.10 **Definíció.** A ${}_{\mathcal{B}}V$ modulus *félegyszerű*, ha izomorf véges sok egyszerű modulus direktösszegével.

Nyilvánvaló, hogy ha ${}_{\mathcal{B}}V$ egyszerű, akkor indekomponálható. Azonban ennek megfordítása nem igaz:

1.2.11 **Példa.** Legyen

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\ \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}\ \ ;$$

a szokásos mátrixszorzással ez algebra $\mathbb{C}$ felett. Válasszuk benne a következő bázist:

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\quad ,\quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad ,\quad f := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\quad .$$

Írjuk fel ezen bázisok szorzótábláját:

	e_1	e_2	f
e_1	e_1	0	f
e_2	0	e_2	0
f	0	f	0

Legyen $V_1 := \mathbb{C}e_1$; $V_2 := \mathrm{Span}\{e_2, f\}$; $U := \mathbb{C}f$. Most tekintsük a szokásos mátrixszorzást, mint ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ modulust, azaz $\mathcal{A}$ hatását önmagán. Ekkor ${}_{\mathcal{A}}V_1, {}_{\mathcal{A}}V_2$ és ${}_{\mathcal{A}}U$ részmodulusai ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$-nak, és ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A} = {}_{\mathcal{A}}V_1 \oplus {}_{\mathcal{A}}V_2$, így ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ dekomponálható. ${}_{\mathcal{A}}V_1$ és ${}_{\mathcal{A}}U$ egydimenziósak, így természetesen egyszerűek. ${}_{\mathcal{A}}V_2$-nek azonban részmodulusa ${}_{\mathcal{A}}U$, ezért nem egyszerű, azonban indekomponálható: könnyen belátható, hogy ${}_{\mathcal{A}}V_2$-nek ${}_{\mathcal{A}}U$-n kívül nincs más nemtriviális részmodulusa, tehát nem állítható elő nemtriviális direktösszeg formájában. ■

1.2.12 **Példa.** Legyen $\mathcal{G}$ a Z_2 két elemű csoport:

Z_2	e	f
e	e	f
f	f	e

Tekintsük a $\mathbb{C}\mathcal{G}$ csoportalgebra hatását önmagára, azaz a ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}\mathbb{C}\mathcal{G}$ modulust. Ez a modulus felbontható két egy dimenziós (ezért egyszerű) modulus direktösszegére, vagyis félegyszerű. A két modulus

$$V_1 := \mathbb{C}(e + f) \quad \text{és} \quad V_2 := \mathbb{C}(e - f) \ .$$

Az e-vel való szorzás természetesen mindkét vektortéren az identitás leképzés, f hatása pedig V_1-en az identitás, V_2-n a mínusz identitás. Ha ezeket a kombinációkat $\mathbb{R}^2$-n ábrázoljuk

$$e + f \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad e - f \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formájában, akkor az e és f elemeket hatásuk alapján 2×2-es mátrixokkal reprezentálhatjuk ezen az $\mathbb{R}^2$ téren, és így kapjuk a csoport egy mátrixreprezentációját:

$$e \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad f \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Ezen mátrixábrázoláson is jól látszik, hogy modulusunk két egy dimenziós modulus direktösszege lett: a mátrix két 1×1-es blokkból áll, a V_1 és V_2 tereket nem keveri. ■

1.2.13 **Példa.** Legyen $\mathcal{G}$ az S_3 csoport az e egységgel és a c, t generátorokkal:

S_3	e	c	c^2	t	tc	tc^2
e	e	c	c^2	t	tc	tc^2
c	c	c^2	e	tc^2	t	tc
c^2	c^2	e	c	tc	tc^2	t
t	t	tc	tc^2	e	c	c^2
tc	tc	tc^2	t	c^2	e	c
tc^2	tc^2	t	tc	c	c^2	e

Az ${}_{\mathbb{C}S_3}\mathbb{C}S_3$ modulus is félegyszerű. Legyen $\mathbb{C} \ni \omega \neq 1;\ \omega^3 = 1$, és

$$v := \frac{1}{6}(e + c + c^2 + t + tc + tc^2)$$
$$v' := \frac{1}{6}(e + c + c^2 - t - tc - tc^2)$$
$$u_1 := \frac{1}{6}(e + \omega c + \omega^2 c^2 + t + \omega^2 tc + \omega tc^2) \qquad u_2 := \frac{1}{6}(e + \omega^2 c + \omega c^2 + t + \omega tc + \omega^2 tc^2)$$
$$u_1' := \frac{1}{6}(e + \omega c + \omega^2 c^2 - t - \omega^2 tc - \omega tc^2) \qquad u_2' := \frac{1}{6}(e + \omega^2 c + \omega c^2 - t - \omega tc - \omega^2 tc^2)$$

alakú. Ekkor $V := \mathbb{C}v, V' := \mathbb{C}v', U := \mathrm{Span}(u_1, u_2), U' := \mathrm{Span}(u_1', u_2')$ részmodulusok, ${}_{\mathbb{C}S_3}\mathbb{C}S_3 = V \oplus V' \oplus U \oplus U'$, és itt mindegyik tag egyszerű, azaz ${}_{\mathbb{C}S_3}\mathbb{C}S_3$ félegyszerű. A fenti hat vektor lineárisan független és belőlük S_3 minden eleme kifejezhető, így a fenti hat vektor új bázisnak tekinthető a $\mathbb{C}S_3$ ábrázolási téren. Ezen (a fenti sorrendnek megfelelő) bázisrendszeren a csoportelemek hatása a következő mátrixokkal ábrázolható:

$$e \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad c \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$c^2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad t \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$tc \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad tc^2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Az első 1×1-es blokk a triviális ábrázolás V-n, a második 1×1-es blokkban csak a t csoportelem ábrázolódik V'-n, a két 2×2-es blokkban pedig hűen ábrázolódik a teljes S_3 csoport U-n és U'-n. ■

A fenti példákban a ${}_{\mathcal{G}}\mathbb{C}\mathcal{G}$ modulus mátrixábrázolásának főátlójában irreducibilis ábrázolások jelentek meg. Egydimenziós blokkoknál ez triviális, az S_3 csoport U és U' modulusának pedig könnyen ellenőrizhető módon nincs egydimenziós részmodulusa.

1.2.14 **Definíció.** Legyen $(V, +)$ kommutatív csoport és $\mathcal{R}$ gyűrű. Az ${}_{\mathcal{R}}V$ modulus *szabad*, ha izomorf ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}$ modulusok direktösszegével. Az izomorfia segítségével a direktösszegben szereplő különböző $\mathcal{R}$-ek generátorai áthozhatók V-re, így azon is megjelenik egy generátorrendszer. Speciálisan ha $\mathcal{R}$ egy $\mathbb{C}\mathcal{G}$ csoportalgebra, akkor a csoportelemeknek megfelelő bázisokat tudunk kijelölni V-n.

1.2.15 **Definíció.** Legyen $\mathbb{C}\mathcal{G}$ csoportalgebra. A $*$ *antilineáris involúció* egy $\mathbb{C}\mathcal{G} \to \mathbb{C}\mathcal{G}$ művelet;

$$\left(\sum_g c(g)g\right)^* := \sum_g \overline{c(g)}g^{-1} \quad .$$

Itt $\overline{c(g)}$ $c(g) \in \mathbb{C}$ komplex konjugáltját jelöli.

1.2.16 **Definíció.** Legyen a ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V$ ábrázolásban a V ábrázolási tér Hilbert-tér, azaz vektortér $\mathbb{C}$ felett, és legyen értelmezve rajta egy $(\ ,\ )$ skalárszorzás ($V \times V \to \mathbb{C}$ nem degenerált, első változójában konjugált lineáris, második változójában lineáris, pozitív definit leképzés, úgy, hogy $\forall u, v \in V$: $(u, v) = \overline{(v, u)}$). Ha minden $a \in \mathbb{C}\mathcal{G}; u, v \in V$ elemre $(u, av) = (a^*u, v)$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V$ *unitér-*, vagy *$*$-ábrázolás.*

1.2.17 **Definíció.** Két ábrázolás D és D' mátrixreprezentációja egymással *ekvivalens*, ha létezik olyan A invertálható mátrix, hogy $D = AD'A^{-1}$.

Az 1.2.13 példában a ${}_{\mathcal{G}}U$ és ${}_{\mathcal{G}}U'$ ábrázolások mátrixreprezentációja ekvivalens (például az $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ unitér mátrix segítségével).

1.2.18 **Tétel.** Véges csoport minden ábrázolása ekvivalens unitér ábrázolással. ■

1.2.19 **Megjegyzés.** Ha a ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V$ unitér, akkor félegyszerű (például azért, mert egyszerű). Legyen ugyanis ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V_1$ részmodulusa ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V$-nek, ekkor V_1 és $V_1^{\perp} := \{u \in V \mid (\forall v \in V_1)\ (u, v) = 0\}$ szintén Hilbert-tér, ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V_1^{\perp}$ szintén részmodulusa ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V$-nek ($g \in \mathcal{G}$-vel hatva $u \in V_1^{\perp}$-re minden $v \in V_1$-re $g^*v \in V_1$ miatt $(gu, v) = (u, g^*v) = 0$, így gu is eleme $V_1^{\perp}$-nek), és ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V = {}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V_1 \oplus {}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V_1^{\perp}$. Amennyiben ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V_1$ vagy ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V_1^{\perp}$ valamelyike nem egyszerű, akkor azt az előbbi eljárást megismételve újra dekomponálhatjuk, egészen addig folytatva, amíg minden részmodulusunk egyszerű lesz. Ilymódon felbontottuk ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V$-t egyszerű részmodulusok direktösszegére, azaz megmutattuk, hogy félegyszerű.

1.2.20 **Megjegyzés.** Az 1.2.12 és 1.2.13 példákban megfelelő kombinációkkal új bázisvektorokat jelöltünk ki az ábrázolási téren, melyeket $\mathbb{R}^2$-n illetve $\mathbb{R}^6$-on reprezentáltunk. Ennek során hallgatólagosan feltettük, hogy ezek az új bázisok ortogonálisak egymásra. Mivel az ábrázolási tér minden vektora kifejthető e bázisok szerint, ezzel a lépéssel egy skalárszorzást értelmeztünk e vektorok felett. A csoport elemeinek hatása, illetve a megfelelő mátrixok unitérek ezen skalárszorzás szerint.
Az 1.2.11 példában viszont találtunk nem egyszerű, de indekomponálható modulust (V_2-t). Azonban ne felejtsük el, hogy ott $\mathcal{A}$ nem volt csoportalgebra, ábrázolásai nem biztos, hogy ekvivalensek unitér ábrázolással. Az e_1, e_2, f vektorok által meghatározott bázisokon például az egyes algebraelemeknek megfelelő mátrixok nem lesznek unitérek (sőt még invertálhatóak sem).

A továbbiakban ábrázolás vagy modulus alatt unitér ábrázolást fogunk érteni.

1.2.21 **Definíció.** Legyen U és V vektortér $\mathbb{C}$ felett, ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}U$ és ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V$ két modulus.
(Ekkor az $U \otimes V$ *tenzorszorzat* egy olyan vektortér $\mathbb{C}$ felett, hogy létezik egy $b\ :\ U \times V \to U \otimes V\ ;\ (u, v) \mapsto u \otimes v$ bilineáris leképzés úgy, hogy bármilyen $c : U \times V \to W$ vektortérbe érkező bilineáris leképzéshez létezik egyetlen $L\ :\ U \otimes V \to W$ függvény, hogy $c = L \circ b$. Az $U \otimes V$ vektortér elemei tehát $u \otimes v$ alakú vektorok lineárkombinációi. Ha U, V Hilbert-terek a $(\ ,\ )_U$ és $(\ ,\ )_V$ skalárszorzatokkal, akkor az

$$U \otimes V \times U \otimes V \to \mathbb{C}\,;\, u_1 \otimes v_1 \times u_2 \otimes v_2 \mapsto (u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2)_{U \otimes V} := (u_1, u_2)_U (v_1, v_2)_V$$

leképzés skalárszorzat lesz tenzorszorzatukon.)
Két csoport-modulusnak létezik a *szorzata*. Ez a

$${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}(U \otimes V)\ :\ \mathbb{C}\mathcal{G} \times (U \otimes V) \to U \otimes V$$

leképzés a

$$\left(\sum_g c(g)g, u \otimes v\right) \mapsto \left(\sum_g c(g)g\right)(u \otimes v) := \sum_g c(g)(gu \otimes gv)$$

leképzés lineáris kiterjesztése az egész $U \otimes V$-re, szintén modulus.

1.2.22 **Megjegyzés.** Az előbbi konstrukció során fontos volt, hogy legyen a csoportalgebrában egy meghatározott generátorrendszer (nevezetesen a csoport elemei), hiszen a tenzorszorzat bilinearitása miatt ezzel tudtuk csak felírni az algebra hatását. Ilyen rendszert egy általános algebra esetén önkényesen tudnánk csak kijelölni, így nem csoportalgebrák modulusainak szorzata nem egyértelmű.

Hilbert téren való ábrázolás esetén két véges dimenziós modulus szorzata is véges dimenziós modulus lesz, az 1.2.18 tétel alapján tehát a szorzat is ekvivalens unitér ábrázolással. Azt pedig láttuk, hogy unitér ábrázolás mindig félegyszerű. Felmerül tehát az a fizikai alkalmazásokban is fontos kérdés, hogy adott csoport irreducibilis ábrázolásainak szorzata mely irreducibilisekre bontható fel.

1.2.23 **Példa.** Nézzük meg az S_3 csoport három különböző irreducibilis ábrázolásának lehetséges szorzatait. (Az U' ábrázolás ekvivalens U-val, ezért nem tekintjük külön ábrázolásnak.) A különböző egyszerű részmodulusok bázisvektorainak tenzorszorzatát képezve rajtuk egyszerűen vizsgálható a csoport elemeinek hatása. Ebből a szempontból

$$v \otimes v \equiv v \quad , \quad v \otimes v' \equiv v' \otimes v \equiv v' \quad , \quad v' \otimes v' \equiv v \quad ,$$
$$v \otimes u_1 \equiv u_1 \otimes v \equiv u_1 \quad , \quad v \otimes u_2 \equiv u_2 \otimes v \equiv u_2 \quad ,$$
$$v' \otimes u_1 \equiv u_1 \otimes v' \equiv u_1' \quad , \quad v' \otimes u_2 \equiv u_2 \otimes v' \equiv u_2'$$

adódik. Kissé bonyolultabb a helyzet, amikor az U részmodulus vektorainak szorzatát nézzük. Rajtuk a csoportgenerátorok mátrixábrázolása a következő:

$$u_1 \otimes u_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 \otimes u_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 \otimes u_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_1 \otimes u_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

esetén

$$e \equiv \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad c \equiv \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad t \equiv \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} .$$

Áttérve a

$$u_1{\otimes}u_2{+}u_2{\otimes}u_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_1{\otimes}u_2{-}u_2{\otimes}u_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2{\otimes}u_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_1{\otimes}u_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bázisra

$$e \equiv \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad c \equiv \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad t \equiv \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

adódik, amiből

$$u_1 \otimes u_2 + u_2 \otimes u_1 \equiv v \quad , \quad u_1 \otimes u_2 - u_2 \otimes u_1 \equiv v'$$
$$u_2 \otimes u_2 \equiv u_1 \quad , \quad u_1 \otimes u_1 \equiv u_2 \; .$$

Megjelent tehát $U \otimes U$-ban V, V' és U is. Mindezek alapján (és U-t U'-vel azonosítva) felírható az S_3 csoport *fúziós gyűrűje*, melynek generátorai ${}_{\mathcal{G}}V, {}_{\mathcal{G}}V', {}_{\mathcal{G}}U$, az összeadás a $\oplus$ művelet, és a szorzás a $\otimes$ a következő szorzótáblával:

$\otimes$	V	V'	U
V	V	V'	U
V'	V'	V	U
U	U	U	$V \oplus V' \oplus U$.

Ennek a gyűrűnek egységeleme V, azonban pl. az U elem nem invertálható. ■

1.3. Karakterek

1.3.1 **Definíció.** Legyen a $\mathcal{G}$ csoport egy ábrázolása ${}_{\mathcal{G}}V$, ezen a csoportelemek mátrixreprezentációja D. Az ehhez tartozó χ *karakter* a $\mathcal{G} \to \mathbb{C}$; $g \mapsto \mathrm{tr}D(g)$ leképzés. Ha ${}_{\mathcal{G}}V_r$ a csoport r-edik irreducibilis ábrázolása, és annak mátrixreprezentációja D_r, akkor a hozzá tartozó karaktert χ_r-el jelöljük.

A tr alatti ciklikus permutálhatóság miatt ekvivalens mátrixreprezentációkhoz tartozó karakterek megegyeznek.

1.3.2 **Állítás.** Az a leképzés, amely a $\mathcal{G}$ csoport $\mathcal{R}$ fúziós gyűrűjéből minden ${}_{\mathcal{G}}V_r$ modulushoz hozzárendeli a hozzá tartozó χ_r karaktert egy gyűrű-homomorfizmus, ha a különböző karakterek felett az összeadást és a szorzást pontonként értelmezzük.
Bizonyítás. Legyen ${}_{\mathcal{G}}V_r$ és ${}_{\mathcal{G}}V_q \in \mathcal{R}$, a hozzájuk tartozó mátrixreprezentációk pedig D_r és D_q. A modulusok direktösszegének mátrixreprezentációja (minden g csoportelemen)

$$D_r \oplus D_q := \begin{pmatrix} (D_r) & 0 \\ 0 & (D_q) \end{pmatrix} \quad ,$$

ennek tr-e a hozzá tartozó karakter:

$$\chi_{r\oplus q} = \mathrm{tr}(D_r \oplus D_q) = \mathrm{tr}D_r + \mathrm{tr}D_q = \chi_r + \chi_q \quad .$$

Látjuk tehát, hogy a modulusok direktösszegén értelmezett karakter a modulusok karakterének összege.
A szorzat vizsgálatához válasszunk egy $(e_i)_{i=1..n_r}$ illetve $(f_j)_{j=1..n_q}$ ortonormált bázist V_r-en illetve V_q-n. Ekkor $(e_i \otimes f_j)_{\substack{i=1..n_r \\ j=1..n_q}}$ bázis $V_r \otimes V_q$-n, és

$$\chi_{r\otimes q} = \mathrm{tr}(D_r \otimes D_q) = \sum_{i,j} \big((e_i \otimes f_j), (D_r \otimes D_q)(e_i \otimes f_j)\big) = \sum_{i,j} (e_i, D_r e_i)\ (f_j, D_q f_j) =$$

$$= \mathrm{tr}D_r\ \mathrm{tr}D_q = \chi_r \chi_q \quad .$$

A modulusok direktszorzatának karaktere tehát a karakterek pontonkénti szorzatával egyenlő. ■

1.3.3 **Állítás.** (I. Schur-lemma) Legyen ${}_{\mathcal{G}}V$ egy egyszerű ábrázolás a V komplex vektortéren. Ha A olyan $V \to V$ lineáris leképzés, hogy minden g csoportelemre $Ag = gA$ teljesül, akkor valamilyen $\lambda \in \mathbb{C}$ számra $A = \lambda\mathbf{1}$, ahol $\mathbf{1}$ a $V \to V$ identitás leképzés. Ekkor A mátrixreprezentációja λ-szor az egységmátrix.
Bizonyítás. Az analízis eszközeivel belátható, hogy az A folytonos lineáris operátornak van sajátvektora, λ sajátértékkel. Ekkor a $V_1 := \{y \in V \mid Ay = \lambda y\}$ lineáris altér nem üres. Ha $x \in V_1$, akkor minden $g \in \mathcal{G}$-re

$$A(gx) = (Ag)x = (gA)x = gAx = g\lambda x = \lambda(gx) \quad ,$$

azaz gx is eleme V_1-nek. Ezért ${}_{\mathcal{G}}V_1$ a ${}_{\mathcal{G}}V$ ábrázolás részmodulusa. Mivel ${}_{\mathcal{G}}V$ egyszerű volt, ezért V_1 csak triviális altér lehet; $V_1 \neq 0$ miatt $V_1 = V$, azaz A az egész V téren $\lambda\mathbf{1}$ alakban hat. ■

1.3.4 **Állítás.** (II. Schur-lemma) Legyen ${}_{\mathcal{G}}V_r$ és ${}_{\mathcal{G}}V_q$ két egyszerű modulus, melyek g-hatását $g_r(\cdot)$-tal illetve $g_q(\cdot)$-tal jelöljük. Ha A olyan $V_r \to V_q$ lineáris leképzés, hogy minden $g \in \mathcal{G}$-re $g_q A = A g_r$, akkor $A = 0$ vagy a két modulus ekvivalens egymással.

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy $A \neq 0$ esetén A bijekció, tehát invertálható. $A \neq 0$ miatt $A\langle V_1\rangle$-nak van nem nulla eleme. Legyen egy ilyen elem x, és legyen $y \in V_1$ olyan, hogy $Ay = x$. Ekkor minden ilyen y-ra

$$g_q x = g_q(Ay) = (g_q A)y = (Ag_r)y = A(g_r y) \in A\langle V_1\rangle \quad ,$$

hiszen $g_r y \in V_1$. Ez azt jelenti, hogy a ${}_{\mathcal{G}}V_q$ egyszerű modulusnak $A\langle V_1\rangle$ invariáns altere és nem üres, tehát $A\langle V_1\rangle = V_2$. Ezért A szürjektív.
Most megmutatjuk, hogy A injektív, azaz $\ker A = \{0\}$. Indirekt tegyük fel, hogy $0 \neq y \in \ker A$. Ekkor

$$0 = g_q(Ay) = (g_q A)y = (Ag_r)y = A(g_r y) \quad ,$$

azaz $g_r y \in \ker A$ is teljesül, ezért $\ker A$ invariáns altere a ${}_{\mathcal{G}}V_r$ egyszerű modulusnak, és az indirekt feltevés szerint nem üres, tehát $\ker A = V_1$, ami viszont ellentmond az $A \neq 0$ feltételnek. ■

1.3.5 **Állítás.** Legyen D_r és D_q két inekvivalens ${}_{\mathcal{G}}V_r$ és ${}_{\mathcal{G}}V_q$ modulushoz tartozó unitér mátrix-reprezentáció. Ezek mátrixelemeire igaz a következő *ortogonalitás*:

$$\sum_{g\in\mathcal{G}} \overline{\big(D_r(g)\big)_{lm}} \big(D_q(g)\big)_{kj} = 0$$

(a vonás a mátrixelem komplex konjugáltját jelenti).
Bizonyítás. Legyen M egy $V_q \to V_r$ lineáris leképzés mátrixa, és

$$A := \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} D_r(h^{-1})MD_q(h) = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} D_r(h)^* MD_q(h) \quad ,$$

ahol n a csoport rendje (elemeinek száma). Ekkor minden g csoportelemre

$$\begin{aligned} D_r(g)A = D_r(g)\frac{1}{n}\sum_h D_r(h^{-1})MD_q(h) &= \frac{1}{n}\sum_h D_r(gh^{-1})MD_q(h) = \\ = \frac{1}{n}\sum_{h'g} D_r(gg^{-1}h'^{-1})MD_q(h'g) &= \frac{1}{n}\sum_{h'} D_r(h'^{-1})MD_q(h')D_q(g) = AD_q(g) \quad , \end{aligned}$$

ezért a II. Schur-lemma alapján és az ábrázolások inekvivalenciája miatt $A = 0$. Ennek mátrixelemeit kiírva:

$$0 = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} \big(D_r(h)^*\big)_{ma} M_{ab} \big(D_q(h)\big)_{bj} \quad .$$

Adott l, k indexekre válasszuk az $M_{ab}^{(l,k)} = \delta_{la}\delta_{bk}$ alakot:

$$0 = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} \big(D_r(h)^*\big)_{ml} \big(D_q(h)\big)_{kj} = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} \overline{\big(D_r(h)\big)_{lm}} \big(D_q(h)\big)_{kj} \quad .$$

■

1.3.6 **Állítás.** Legyen D egy ${}_{\mathcal{G}}V$ unitér, egyszerű modulus mátrixreprezentációja. Ennek mátrixelemeire igaz a következő *ortonormáltság*:

$$\frac{1}{n}\sum_g \overline{D(g)_{ik}} D(g)_{lm} = \frac{1}{d}\delta_{il}\delta_{km} \quad ,$$

ahol n a csoport rendje, d pedig V dimenziója.

Bizonyítás. Az előbbi bizonyításhoz hasonlóan egy $V \to V$ lineáris leképzés M mátrixával vezessük be a

$$A := \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} D(h^{-1})MD(h) = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} D(h)^* MD(h)$$

mátrixot, melyre

$$D(g)A = D(g)\frac{1}{n}\sum_h D(h^{-1})MD(h) = \frac{1}{n}\sum_h D(gh^{-1})MD(h) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{h'g} D(gg^{-1}h'^{-1})MD(h'g) = \frac{1}{n}\sum_{h'} D(h'^{-1})MD(h')D(g) = AD(g)$$

szintén teljesül $g \in \mathcal{G}$ esetén. Az I. Schur-lemma miatt van olyan $\lambda \in \mathbb{C}$, melyre $A = \lambda\mathbf{1}$, amit indexesen kiírva

$$\lambda\delta_{km} = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} (D(h)^*)_{ka} M_{ab} D(h)_{bm} \quad .$$

Adott i,l indexre $M^{(i,l)}_{ab} = \delta_{ai}\delta_{bl}$ választásával

$$\lambda^{(i,l)}\delta_{km} = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} (D(h)^*)_{ki} D(h)_{lm} = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} \overline{D(h)_{ik}} D(h)_{lm} \quad . \tag{1.3.1}$$

Ha most összeejtjük a k és m indexeket, akkor

$$\lambda^{(i,l)}d = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} \overline{D(h)_{ik}} D(h)_{lk} = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} \overline{D(h)_{ik}(D(h))^*_{kl}} = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} \overline{D(h)_{ik}D(h^{-1})_{kl}} =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} \overline{D(hh^{-1})_{il}} = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} \overline{\mathbf{1}_{il}} = \delta_{il} \quad ,$$

így minden i,l indexre $\lambda^{(i,l)} = \frac{1}{d}\delta_{il}$. Ezt (1.3.1)-be beírva

$$\frac{1}{d}\delta_{il}\delta_{km} = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} \overline{D(h)_{ik}} D(h)_{lm} \quad . \qquad \blacksquare$$

Összefoglalva tehát a D_r és D_q unitér irreducibilis mátrixreprezentációkra

$$\frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} \overline{D_r(h)_{ik}} D_q(h)_{lm} = \frac{1}{d_r}\delta_{rq}\delta_{il}\delta_{km} \quad , \tag{1.3.2}$$

illetve

$$\frac{1}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} \overline{\chi_r(h)}\chi_q(h) = \frac{1}{d_r}\delta_{rq}\delta_{il}\delta_{il} = \delta_{rq}$$

teljesül.

1.3.7 **Állítás.** A ${}_{\mathbb{C}\mathcal{G}}V_r$ egyszerű d_r dimenziós modulusokhoz tartozó

$$e_r := \frac{d_r}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}} \overline{\chi_r(h)}\ h$$

csoportalgebra-elemek centrális projektorok, és különböző r indexek esetén egymásra ortogonálisak.

Bizonyítás. A karakterek tr-képzéssel definiáltak, ezért csoportelemek szorzatai a karakterek argumentumában ciklikusan permutálhatók. Ezt figyelembe véve és az összegzés változójának cseréivel

$$e_r\ g = \frac{d_r}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}}\overline{\chi_r(h)}\ hg = \frac{d_r}{n}\sum_{h'g^{-1}\in\mathcal{G}}\overline{\chi_r(h'g^{-1})}\ h' = \frac{d_r}{n}\sum_{h'\in\mathcal{G}}\overline{\chi_r(g^{-1}h')}\ h' =$$

$$= \frac{d_r}{n}\sum_{gh''\in\mathcal{G}}\overline{\chi_r(h'')}\ gh'' = g\ \frac{d_r}{n}\sum_{h''\in\mathcal{G}}\overline{\chi_r(h'')}\ h'' = g\ e_r \quad ,$$

tehát e_r valóban centrális eleme az algebrának.
Ha e_r és e_q a két egyszerű ábrázoláshoz tartozó kifejezés, akkor

$$e_r\ e_q = \frac{d_r d_q}{n^2}\sum_{h\in\mathcal{G}}\sum_{h'\in\mathcal{G}}\overline{\chi_r(h)\chi_q(h')}\ hh' = \frac{d_r d_q}{n^2}\sum_{h\in\mathcal{G}}\sum_{h^{-1}g\in\mathcal{G}}\overline{\chi_r(h)\chi_q(h^{-1}g)}\ g =$$

$$= \frac{d_r d_q}{n^2}\sum_{h\in\mathcal{G}}\sum_{g\in\mathcal{G}}\overline{\chi_r(h)\chi_q(h^{-1}g)}\ g = \frac{d_r d_q}{n^2}\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{h\in\mathcal{G}}\overline{\chi_r(h)\chi_q(h^{-1}g)}\ g \quad .$$

Az itt megjelenő

$$\sum_{h\in\mathcal{G}}\overline{\chi_r(h)\chi_q(h^{-1}g)} = \sum_{h\in\mathcal{G}}\overline{D_r(h)_{ii}\ D_q(h^{-1}g)_{jj}} = \left(\sum_{h\in\mathcal{G}}\overline{D_r(h)_{ii}\ D_q(h^{-1})_{jk}}\right)\overline{D_q(g)_{kj}} =$$

$$= \left(\sum_{h\in\mathcal{G}}\overline{D_r(h)_{ii}\ (D_q(h)^*)_{jk}}\right)\overline{D_q(g)_{kj}} = \left(\sum_{h\in\mathcal{G}}\overline{D_r(h)_{ii}}\ D_q(h)_{kj}\right)\overline{D_q(g)_{kj}}$$

alak az (1.3.2) ortogonalitást felhasználva egyszerűsíthető:

$$\sum_{h\in\mathcal{G}}\overline{\chi_r(h)\chi_q(h^{-1}g)} = \frac{n}{d_r}\delta_{rq}\delta_{ik}\delta_{ij}\overline{D_q(g)_{kj}} = \frac{n}{d_r}\delta_{rq}\delta_{kj}\overline{D_q(g)_{kj}} = \frac{n}{d_r}\delta_{rq}\overline{\chi_q(g)} \quad .$$

Így

$$e_r\ e_q = \frac{d_r d_q}{n^2}\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{h\in\mathcal{G}}\overline{\chi_r(h)\chi_q(h^{-1}g)}\ g = \frac{d_q}{n}\delta_{rq}\sum_{g\in\mathcal{G}}\overline{\chi_q(g)}\ g = \delta_{rq}\ e_q \quad ,$$

ami egyszerre bizonyítja e_r és e_q projektor voltát valamint ortogonalitásukat. ■

1.3.8 **Megjegyzés.** Ezek a projektorok részmodulusokra vetítenek, hiszen bármilyen $g\in\mathcal{G}$ elem hatása nem visz ki az ő alterükből:

$$g\langle e_r\mathbb{C}\mathcal{G}\rangle = ge_r\langle\mathbb{C}\mathcal{G}\rangle = e_r g\langle\mathbb{C}\mathcal{G}\rangle = e_r\langle\mathbb{C}\mathcal{G}\rangle = \langle e_r\mathbb{C}\mathcal{G}\rangle \quad .$$

1.3.9 **Állítás.** Az r-edik irreducibilis ábrázoláshoz tartozó e_r projektor $\mathbb{C}\mathcal{G}$-ből éppen a V_r részmodulusok direktösszegére vetít.
Bizonyítás. Az e_r projektor mátrixa a $\mathbb{C}\mathcal{G}$ algebrában

$$(e_r)_{ab} = \frac{d_r}{n}\sum_{h\in\mathcal{G}}\overline{(D_r(h))_{ii}}\Big((\bigoplus^{\mu_{q_1}} D_{q_1})\oplus\ldots\oplus(\bigoplus^{\mu_r} D_r)\oplus\ldots\oplus(\bigoplus^{\mu_{q_N}} D_{q_N})\Big)_{ab} \quad ,$$

ahol az ${}_{\mathcal{G}}\mathbb{C}\mathcal{G}$ direktösszeg μ_{q_i}-szer tartalmazza a q_i-edik irreducibilis ábrázolást. Az (1.3.2) ortogonalitás alapján az a és b index azon értékeire lesz az $(e_r)_{ab}$ mátrixelem 1, ahol $a=b$ és ezek az indexek éppen az r-edik egyszerű modulus mátrixát jelölik ki az ${}_{\mathcal{G}}\mathbb{C}\mathcal{G}$ direktösszegben. ■

1.3.10 **Definíció.** A $\mathcal{G}$ véges csoport *konjugációs osztálya* egy olyan $A \subset \mathcal{G}$ halmaz, hogy minden $g \in \mathcal{G}$ elemre $gAg^{-1} = A$ teljesül, és minden $h, h' \in A$ tagjához van olyan $g \in \mathcal{G}$ elem, hogy $h' = ghg^{-1}$.

A karakterek tr-származtatásából nyilvánvaló, hogy egy karakter értéke egy konjugációs osztály elemeire ugyanaz.

1.3.11 **Állítás.** A $\mathcal{G}$ véges csoportnak pontosan annyi inekvivalens irreducibilis ábrázolása van, mint ahány konjugációs osztálya.
Bizonyítás. A $\mathbb{C}\mathcal{G}$ csoportalgebra centrumát azok az elemek alkotják, melyek kommutálnak minden csoportelemmel, azaz az I. Schur-lemma alapján minden egyszerű moduluson a centrum elemei az identitás számszorosaként hatnak. N darab inekvivalens egyszerű modulus esetén pontosan N darab ilyen különböző számszorzó létezik, azaz a centrum dimenziója N.
Legyenek $A_1, \ldots, A_K$ a csoport konjugációs osztályai. Ezek diszjunkt felbontását alkotják $\mathcal{G}$-nek, ezért a

$$\sigma(A_i) := \sum_{h \in A_i} h$$

elemek különböző $i = 1 \ldots K$ esetén lineárisan függetlenek. Adott $g \in \mathcal{G}$ esetén a $A_i \to A_i$; $h \mapsto ghg^{-1}$ leképzés bijekció, ezért

$$g\sigma(A_i)g^{-1} = \sum_{h \in A_i} ghg^{-1} = \sum_{ghg^{-1} \in A_i} ghg^{-1} = \sum_{h' \in A_i} h' = \sigma(A_i) \quad ,$$

azaz $g\sigma(A_i) = \sigma(A_i)g$. A $\sigma(A_i)$ tehát K darab lineárisan független elem a csoportalgebra centrumában, ezért annak dimenziója$= N \geq K$.
Most azt is megmutatjuk, hogy $N \leq K$. A K darab konjugációs osztályon belül állandó $\mathcal{G} \to \mathbb{C}$ függvények tere K dimenziós, és tudjuk, hogy a χ karakterek ilyen függvények. Azt is tudjuk viszont, hogy az N darab inekvivalens irreducibilis ábrázoláshoz tartozó karakter egymásra ortogonális (az (1.3.2)-nél karakterekkel felírt kifejezés *skalárszorzata* a karaktereknek). Ezért $N \leq K$.
$\blacksquare$

A Z_2 csoportnak $\{e\}$ és $\{f\}$ a két konjugációs osztálya, S_3-nak pedig $\{e\}, \{c, c^2\}$ és $\{t, tc, tc^2\}$ az osztályai, tehát két illetve három inekvivalens irreducibilis ábrázolásuk van. Ezeket az 1.2.12 és 1.2.13 példákban meg is találtuk.

1.3.12 **Tétel.** (Burnside-tétel) Legyen $\mathcal{G}$ véges csoport. Ekkor a ${}_{\mathcal{G}}\mathbb{C}\mathcal{G}$ modulus felírható egy olyan direktösszeg alakjában, mely a $\mathcal{G}$ csoport összes irreducibilis ábrázolását annyiszor tartalmazza, amennyi az adott ábrázolás dimenziója.
Bizonyítás. Számozzuk be a csoport elemeit az α egész indexekkel, és vezessük be $\mathbb{R}^n$-en a $h_\alpha \in \mathcal{G}$-nek megfelelő $f_i^{(\alpha)} := \delta_{\alpha i}$ bázisvektorokat. Ebben a bázisban a ${}_{\mathcal{G}}\mathbb{C}\mathcal{G}$ modulus igen egyszerűen ábrázolható. Amennyiben $g \in \mathcal{G}$ nem a csoport e egységeleme, akkor az őt ábrázoló mátrixnak ebben a bázisban nem lesz diagonális eleme, hiszen az azt jelentené, hogy van olyan h_α elem a csoportban, hogy $gh_\alpha = h_\alpha$, és h_α invertálhatósága miatt ezt kizárja, hogy $g \neq e$. Ha viszont $g = e$, akkor ábrázolási mátrixa az $n \times n$-es egységmátrix, ahol n a csoport rendje. Ezért a ${}_{\mathcal{G}}\mathbb{C}\mathcal{G}$ modulus karaktere $\chi(g) = n\delta_{e,g}$ alakú.
A ${}_{\mathcal{G}}\mathbb{C}\mathcal{G}$ modulus véges dimenziós, ezért félegyszerű, azaz minden ábrázolása ekvivalens a

$$(\bigoplus^{\mu_{q_1}} D_{q_1}) \oplus \ldots \oplus (\bigoplus^{\mu_r} D_r) \oplus \ldots \oplus (\bigoplus^{\mu_{q_N}} D_{q_N})$$

direktösszeggel, melyben a q_i-edik illetve r-edik irreducibilis ábrázolás μ_{q_i}-szer illetve μ_r-szer szerepel. Ezek alapján (és az 1.3.2 állítás szerint) a ${}_{\mathcal{G}}\mathbb{C}\mathcal{G}$ modulus karaktere (mely minden mátrixábrázolására ugyanannyi)

$$\chi(g) = \mu_{q_1}\chi_{q_1}(g) + \cdots + \mu_r\chi_r(g) + \cdots + \mu_{q_N}\chi_{q_N}(g) \quad ,$$

és ez megegyezik $n\delta_{e,g}$-vel:

$$\mu_{q_1}\chi_{q_1}(g) + \cdots + \mu_r\chi_r(g) + \cdots + \mu_{q_N}\chi_{q_N}(g) = n\delta_{e,g} \quad .$$

Szorozzuk be ezt az egyenlőséget $\overline{\chi_r(g)}$-al és összegezzünk g-re:

$$\sum_g \overline{\chi_r(g)}\big(\mu_{q_1}\chi_{q_1}(g) + \cdots + \mu_r\chi_r(g) + \cdots + \mu_{q_N}\chi_{q_N}(g)\big) = \sum_g \overline{\chi_r(g)}n\delta_{e,g} \quad .$$

A bal oldalon a szorozást elvégezve és alkalmazva az (1.3.2) ortonormáltságot

$$n\mu_r = \overline{\chi_r(e)}n = \overline{\chi_r(\mathbf{1}_{d_r\times d_r})}n = d_r n \quad ,$$

így $\mu_r = d_r$-szer szerepel a D_r irreducibilis ábrázolás a ${}_{\mathcal{G}}\mathbb{C}\mathcal{G}$ modulusban. ■

Az 1.2.12 és 1.2.13 példák szépen illusztrálják ennek a tételnek a megvalósulását.

Az eddigiek alapján tehát nem túl nagy véges csoportok esetén meg lehet nézni a konjugációs osztályokat, abból az inekvivalens irreducibilis ábrázolások számát, az ábrázolások dimenzióinak négyzetösszege kiadja ${}_{\mathcal{G}}\mathbb{C}\mathcal{G}$ dimenzióját, azaz a csoport rendjét. Ebből a tényből és a karakterek ortogonalitásából az irreducibilis ábrázolások karaktereire lehet következtetni, amelyek segítségével előállíthatók az e_r centrális projektorok. Ezek már az egyes irreducibilis ábrázolások "μ_r"-szeres direktösszegeinek alterére vetítenek, ahol általában már nem túl nehéz meghatározni magát az irreducibilis ábrázolást.

2. Reprezentációelmélet

Bizonyos matematikai eszközök alapvető tulajdonságait a *kategóriák* foglalják össze. Mi itt a kategóriák fogalmát nem definiáljuk, mindazonáltal a csoportábrázolásokról célszerű néhány fontos tulajdonságot ezen a nyelven megfogalmazni.

2.1. A reprezentációs kategória

2.1.1 **Definíció.** Legyen $\mathcal{G}$ véges csoport, $\mathcal{A}$ a csoportalgebra (egy $\mathcal{K}$ test felett). A Mod$\mathcal{A}$ *kategóriát* az *objektumok, nyilak*, és a *kompozíció művelet* alkotják, ahol

– az objektumok a véges dimenziós bal $\mathcal{A}$-modulusok;
– az ${}_{\mathcal{A}}V$ és ${}_{\mathcal{A}}W$ modulusok közti nyilak vagy *intertwinerek* $T : V \to W$ homomorfizmusok úgy, hogy minden $a \in \mathcal{A}$ és $v \in V$ elemre $T(av) = aTv$ teljesül; ez utóbbi feltétel azt jelenti, hogy mátrixábrázolás esetén $TD_V(a) = D_W(a)T$;
– a $T : U \to V$ és $S : V \to W$ nyilak kompozíciója $S \circ T : U \to W$ a szokásos függvénykompozíció, szintén nyíl.

Minden ${}_{\mathcal{A}}V$ modulushoz létezik az $\mathbf{1}_V$ *egységnyíl*, amely a V ábrázolási tér identitása, így bármely V-ről induló nyíllal jobbról komponálva, illetve V-be érkező nyíllal balról komponálva nem változtat azokon.

2.1.2 **Definíció.** Két objektum *monoidális szorzatának* nevezzük a két modulus tenzorszorzatát.

2.1.3 **Definíció.** Legyen $T_1 : V_1 \to W_1$ és $T_2 : V_2 \to W_2$ nyíl. Ekkor e nyilak *monoidális szorzata* $T_1 \otimes T_2 : V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2\,;\ v_1 \otimes v_2 \mapsto Tv_1 \otimes Tv_2$ szintén nyíl.

2.1.4 **Megjegyzés.** A monoidális szorzatokra igazak a következő egyszerű tulajdonságok (${}_{\mathcal{A}}V, {}_{\mathcal{A}}U$, ${}_{\mathcal{A}}W$ objektumok):

(i) (asszociáció) $U \otimes (V \otimes W) = (U \otimes V) \otimes W$ illetve $T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) = (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3$.
(ii) (interchange law) Ha T_1, T_2, S_1, S_2 nyilak olyan terek között hatnak, hogy $T_1 \circ S_1$ és $T_2 \circ S_2$ értelmes, akkor $(T_1 \otimes T_2) \circ (S_1 \otimes S_2)$ is értelmes és megegyezik $(T_1 \circ S_1) \otimes (T_2 \circ S_2)$-vel.
(iii) $\mathbf{1}_V \otimes \mathbf{1}_W = \mathbf{1}_{V \otimes W}$.
(iv) Ha ${}_{\mathcal{A}}I$ a *monoidális egység*, az a modulus, ami minden $a \in \mathcal{A}$ elemhez az $1 \in \mathbb{C}$ számot rendeli, és $\mathbf{1}_I$ az ő egységnyila, akkor $I \otimes V = V \otimes I = V$ és minden T nyílra $\mathbf{1}_I \otimes T = T \otimes \mathbf{1}_I = T$.

A továbbiakban a modulusok ábrázolási tere Hilbert-tér, és az ábrázolások unitérek lesznek:
2.1.5 **Definíció.** A *reprezentáció kategória* Rep$\mathcal{A}$ Mod$\mathcal{A}$ unitér modulusaiból, azok nyilaiból és a kompozíció műveletből áll.

2.1.6 **Definíció.** A V feletti $(\ ,\ )_V$ illetve W feletti $(\ ,\ )_W$ skalárszorzások segítségével egy $T : V \to W$ nyíl *adjungáltja* legyen az a $T^* : W \to V$ leképzés, amelyre minden $v \in V, w \in W$ esetén $(T^*w, v)_V = (w, Tv)_W$ teljesül.

2.1.7 **Állítás.** T^* is intertwiner, és az S, T nyilakra

(i) ha $T \circ S$ értelmes, akkor $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$;
(ii) $(T \otimes S)^* = T^* \otimes S^*$;
(iii) $\mathbf{1}_V^* = \mathbf{1}_V$.

Bizonyítás. T^* intertwiner voltához meg kell mutatni, hogy lineáris, illetve hogy az a algebra-elem hatásával felcserélhető. $u \in U; v, v_1, v_2 \in V; w, w_1, w_2 \in W; z \in Z$ esetén

$$\big(T^*(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2), v\big)_V = \big((\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2), Tv\big)_W = \overline{\lambda_1}(w_1, Tv)_W + \overline{\lambda_2}(w_2, Tv)_W =$$
$$= \overline{\lambda_1}(T^*w_1, v)_V + \overline{\lambda_2}(T^*w_2, v)_V = (\lambda_1 T^*w_1 + \lambda_2 T^*w_2, v)_V \quad ,$$

ami a skalárszorzat nem degeneráltsága miatt T^* linearitását jelenti. Kihasználva a modulusok unitérségét

$$\big(T^*(aw), v\big)_V = (aw, Tv)_W = (w, a^*Tv)_W = \big(w, T(a^*v)\big)_W = (T^*w, a^*v)_V = (aT^*w, v)_V \quad ,$$

tehát T^* felcserél az a-hatással.
(i) $S : U \to V\,;\, T : V \to W$ esetén minden $u \in U$-ra

$$\big((T \circ S)^*w, u\big)_U = (w, T \circ Su)_W = (T^*w, Su)_V = (S^* \circ T^*w, u)_U \quad .$$

(ii) $S : U \to Z\,;\, T : V \to W$ esetén

$$\begin{aligned}\big((T \otimes S)^*(w \otimes z), v \otimes u\big)_{V\otimes U} &= \big(w \otimes z, (T \otimes S)(v \otimes u)\big) = \\ &= \big(w \otimes z, (Tv) \otimes (Su)\big)_{W \otimes Z} = (w, Tv)_W (z, Su)_Z = (T^*w, v)_V (S^*z, u)_U = \\ &= \big((T^*w) \otimes (S^*z), v \otimes u\big)_{V\otimes U} = \big((T^* \otimes S^*)(w \otimes z), v \otimes u\big)_{V\otimes U} \quad .\end{aligned}$$

(iii)

$$(\mathbf{1}_V^* v_1, v_2)_V = (v_1, \mathbf{1}_V v_2)_V = (v_1, v_2)_V = (\mathbf{1}_V v_1, v_2)_V \quad . \qquad \blacksquare$$

2.1.8 **Definíció.** $T : V \to W$
- *monomorfizmus*, ha minden $S : U \to V$ nyílra $T \circ S = 0 \Rightarrow S = 0$;
- *epimorfizmus*, ha minden $S : W \to U$ nyílra $S \circ T = 0 \Rightarrow S = 0$;
- *izomorfizmus*, ha létezik $S : W \to V$ nyíl, hogy $T \circ S = \mathbf{1}_W$ és $S \circ T = \mathbf{1}_V$. Ekkor azt mondjuk, hogy ${}_{\mathcal{A}}V$ és ${}_{\mathcal{A}}W$ *izomorfak.*

Mod$\mathcal{A}$-ban az ábrázolások ekvivalenciája intertwiner létezését jelentette a modulusok között. Azonban ha Mod$\mathcal{A}$-nak "unitér részét", azaz Rep$\mathcal{A}$-t nézzük, ott az *unitérekvivalencia* lesz fontos, amikor a két modulus közötti intertwiner unitér. A következő állítás szerint ez a két fogalom nem különbözik egymástól:
2.1.9 **Állítás.** Ha Rep$\mathcal{A}$-ban két modulus ekvivalens, akkor unitérekvivalens is.
Bizonyítás. Legyen $T : U \to V$ invertálható intertwiner. Megmutatjuk, hogy ekkor létezik $S : U \to V$ unitér intertwiner is. A skalárszorzás és az adjungálás definíciója valamint T invertálhatósága alapján könnyen ellenőrizhető, hogy $Y := T^*\,T : U \to U$ pozitív lineáris leképzés. Ezért elkészíthető a *gyöke*, melyet úgy kapunk, hogy mátrixát egy O bázistranszformációval diagonalizáljuk, a kapott pozitív elemekből gyököt vonunk, majd O^{-1}-el az eredeti bázisba visszatranszformáljuk. Az így kapott $Y^{\frac{1}{2}} : U \to U$ pozitív leképzés invertálható. Most megmutatjuk, hogy az invertálás után kapott $Y^{-\frac{1}{2}}$ leképzés intertwiner. Tudjuk, hogy az $U \to U$ folytonos lineáris leképzések $\mathcal{L}(U)$ halmazának bármilyen (operátornorma szerint) korlátos részén az $\mathcal{L}(U) \to \mathcal{L}(U)\,;\, X \mapsto X^{-\frac{1}{2}}$ leképzés egyenletesen közelíthető valamilyen $P_n : \mathcal{L}(U) \to \mathcal{L}(U)$ n-edfokú polinommal. Ha $\mathcal{L}(U)$-nak ebbe a korlátos részébe Y is beleesik, akkor az $Y^{-\frac{1}{2}} - P_n(Y)$ operátor normája tart nullához, ahogy n tart végtelenhez. Ha a a csoportalgebra elemének hatása ($U \to U$ folytonos lineáris leképzés), akkor az előbbi operátor normája a-val komponálva is tart nullához. Az operátornorma háromszög-egyenlőtlenségéből kaphatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$|||[a, Y^{-\frac{1}{2}}]||| \le |||[a, \big(Y^{-\frac{1}{2}} - P_n(Y)\big)]||| + |||[a, P_n(Y)]||| \quad .$$

A jobb oldalon a második tag minden n-re nulla, hiszen Y intertwiner, és minden véges polinomja is az, az első tag pedig az előbbiek alapján tart nullához, ha $n \mapsto \infty$. Ezért elvégezve ezt a határátmenetet azt kapjuk, hogy a felcserél $Y^{-\frac{1}{2}}$-vel, azaz $Y^{-\frac{1}{2}}$ intertwiner. P_n segítségével azt is könnyen megkaphatjuk, hogy Y önadjungáltsága miatt $Y^{-\frac{1}{2}}$ is önadjungált operátor.
Legyen most $S := T\,Y^{-\frac{1}{2}} = T\,(T^*\,T)^{-\frac{1}{2}}$. Az eddigiek alapján tehát ez $U \to V$ intertwiner. S ugyanakkor unitér is:

$$S\,S^* = T\,(T^*\,T)^{-\frac{1}{2}}\,(T^*\,T)^{-\frac{1}{2}}\,T^* = T\,(T^*\,T)^{-1}\,T^* = T\,T^{-1}\,(T^*)^{-1}\,T^* = \mathbf{1}_U \qquad \blacksquare$$

2.2. A 3j- és a 6j-szimbólumok

A fizikában összetett rendszerek esetén gyakran előfordul, hogy szükségünk van annak ismeretére, hogyan határozható meg a rendszer egy szimmetriával kapcsolatos fizikai mennyisége részrendszereinek hasonló mennyiségeiből. Ilyen eset például többrészecskés rendszerek spinjének (vagy akár izospinjének, színének, ízének...) felírása. Ekkor azt a feladatot kell megoldanunk, hogy a részrendszereknek megfelelő szimmetriacsoport-modulusok tenzorszorzataiban az egész rendszer egy bonyolultabb modulusának vektorait azonosíthassuk viselkedésük alapján. Az itt szereplő félegyszerű modulusok dekomponálása után a feladat egyszerű modulusok tenzorszorzata vektorainak más egyszerű modulusok vektoraival való megfeleltetésére korlátozódik. Az ilyen megfeleltetéseket írják le a 3j-szimbólumok, melyek tartalmazzák az ún. Klebsh-Gordan együtthatókat.

2.2.1 **Definíció.** Legyenek $\{V_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ a $\mathcal{G}$ csoport inekvivalens egyszerű ábrázolásainak terei. A $V_\gamma \to V_\alpha \otimes V_\beta$ intertwinerek $\mathcal{T}_{\alpha\beta}^\gamma$ halmazán tekintsük a

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}^\gamma \times \mathcal{T}_{\alpha\beta}^\gamma \to \mathrm{End}(V_\gamma)\ ;\ (T_1;T_2) \mapsto T_1^* \circ T_2$$

leképzést. Mivel V_γ egyszerű ábrázolási tér és rajta a $T_1^* \circ T_2$ intertwiner kommutál minden $g \in \mathcal{G}$ csoportelem hatásával, ezért az I. Schur-lemma alapján $T_1^* \circ T_2 = \lambda \mathbf{1}_\gamma$. Jelöljük ezt a $\lambda \in \mathbb{C}$ számot (T_1, T_2)-vel. Ekkor a

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}^\gamma \times \mathcal{T}_{\alpha\beta}^\gamma \to \mathbb{C}\ ;\ (T_1;T_2) \mapsto (T_1, T_2)$$

leképzés

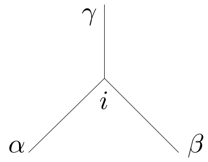
- első változójában konjugált lineáris, másodikban lineáris;
- változóinak felcserélésére értéke komplex konjugálódik;
- nem degenerált, hiszen ha minden $T \in \mathcal{T}_{\alpha\beta}^\gamma$-re $(T_1, T) = 0$, akkor $T := T_1$-re és minden $v \in V_\gamma$ vektorra

$$0 = (v,v)_{V_\gamma}(T_1,T_1) = \big(v, (T_1,T_1)\mathbf{1}_{V_\gamma} \cdot v\big)_{V_\gamma} = \big(v, (T_1^* \circ T_1)v\big)_{V_\gamma} = (T_1 v, T_1 v)_{V_\gamma} \quad ,$$

  tehát $T_1 v = 0$, azaz $T_1 = 0$;
- pozitív definit, mert minden $v \in V_\gamma$ vektorra

$$(v,v)_{V_\gamma}(T_1,T_1) = \big(v, (T_1,T_1)\mathbf{1}_{V_\gamma} \cdot v\big)_{V_\gamma} = \big(v, (T_1^* \circ T_1)v\big)_{V_\gamma} = (T_1 v, T_1 v)_{V_\gamma} \geq 0 \quad .$$

Ezért a fenti leképzés egy *skalárszorzat* $\mathcal{T}_{\alpha\beta}^\gamma$-n. Így $\mathcal{T}_{\alpha\beta}^\gamma$ Hilbert-tér, dimenziója legyen $N_{\alpha\beta}^\gamma$, és legyen rajta $(T_{\alpha\beta}^{\gamma i})_{i=1..N_{\alpha\beta}^\gamma}$ ortonormált bázis, melynek vektorait *3j-szimbólumoknak* is nevezik. Ezeket a bázisokat egy ábrával is szokták reprezentálni:



2.2.2 **Állítás.** A $V_\delta \to V_\alpha \otimes V_\beta \otimes V_\gamma$ intertwinerek $\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}^\delta$ tere az előbbi konstrukcióhoz hasonlóan szintén Hilbert-tér, melyen ortonormált bázis a

$$\left\{ (T_{\alpha\beta}^{\varepsilon i} \otimes \mathbf{1}_\gamma) \circ T_{\varepsilon\gamma}^{\delta j} \mid \varepsilon = 1..N,\ i = 1..N_{\alpha\beta}^\varepsilon,\ j = 1..N_{\varepsilon\gamma}^\delta \right\}$$

rendszer, valamint egy másik ortonormált bázis a

$$\left\{ (\mathbf{1}_\alpha \otimes T_{\beta\gamma}^{\varepsilon i}) \circ T_{\alpha\varepsilon}^{\delta j} \mid \varepsilon = 1..N,\ i = 1..N_{\beta\gamma}^\varepsilon,\ j = 1..N_{\alpha\varepsilon}^\delta \right\}$$

rendszer (N az inekvivalens irreducibilis ábrázolások száma). Azonban az ε index nem mindig fut végig az összes irreducibilis ábrázoláson, hiszen lehet, hogy az ε és γ illetve az ε és α ábrázolások szorzatában nem jelenik meg a δ ábrázolás.
Bizonyítás. Legyenek $u, v \in V_\delta$, ekkor

$$\text{(2.2.1)} \quad \Big(\big((T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{1}_\gamma) \circ T^{\delta j}_{\varepsilon\gamma}\big)^* \circ \big((T^{\varepsilon' i'}_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{1}_\gamma) \circ T^{\delta j'}_{\varepsilon'\gamma}\big) v \ , \ u \Big)_{V_\delta} =$$
$$= \Big((T^{\varepsilon' i'}_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{1}_\gamma)(T^{\delta j'}_{\varepsilon'\gamma} \ v) \ , \ (T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{1}_\gamma)(T^{\delta j}_{\varepsilon\gamma} \ u) \Big)_{V_\alpha \otimes V_\beta \otimes V_\gamma} \quad .$$

A $T^{\delta j'}_{\varepsilon'\gamma} \ v$ illetve $T^{\delta j}_{\varepsilon\gamma} \ u$ $V_{\varepsilon'} \otimes V_\gamma$ illetve $V_\varepsilon \otimes V_\gamma$-beli elemek kifejthetők $\sum_{ab} z'_a \otimes w'_b$ illetve $\sum_{cd} z_c \otimes w_d$ alakban, ahol minden a, b, c, d indexre $z'_a \in V_{\varepsilon'}$; $z_c \in V_\varepsilon$; $w'_b, w_d \in V_\gamma$, így (2.2.1)

$$= \sum_{abcd} \Big((T^{\varepsilon' i'}_{\alpha\beta} \ z'_a) \otimes w'_b \ , \ (T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta} \ z_c) \otimes w_d \Big)_{V_\alpha \otimes V_\beta \otimes V_\gamma} =$$
$$= \sum_{abcd} \Big(T^{\varepsilon' i'}_{\alpha\beta} \ z'_a \ , \ T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta} \ z_c \Big)_{V_\alpha \otimes V_\beta} (w'_b \ , \ w_d)_{V_\gamma} = \sum_{abcd} \Big(z'_a \ , \ (T^{\varepsilon' i'}_{\alpha\beta})^* \circ T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta} \ z_c \Big)_{V_{\varepsilon'}} (w'_b \ , \ w_d)_{V_\gamma} \quad .$$

A megjelenő $(T^{\varepsilon' i'}_{\alpha\beta})^* \circ T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta}$ kombináció egy $V_\varepsilon \to V_{\varepsilon'}$ intertwiner. Könnyen belátható, hogy a magja V_ε-ben illetve a $(T^{\varepsilon' i'}_{\alpha\beta})^* \circ T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta} \langle V_\varepsilon \rangle$ halmaz $V_{\varepsilon'}$-ben invariáns alterek a csoporthatásra nézve, melyek trivialitását kihasználva kiderül, hogy ez az intertwiner vagy a nulla leképzés, vagy bijekció. Az utóbbi esetben a II. Schur-lemma alapján V_ε és $V_{\varepsilon'}$ ekvivalensek, azaz $\varepsilon = \varepsilon'$. Ezért a $T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta}$ bázis ortogonalitását is felhasználva

$$(T^{\varepsilon' i'}_{\alpha\beta})^* \circ T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} (T^{\varepsilon i'}_{\alpha\beta})^* \circ T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{ii'} \mathbf{1}_\varepsilon \quad .$$

Ezzel (2.2.1)

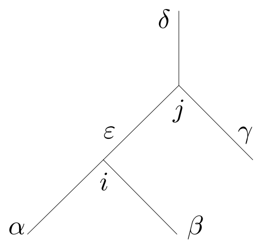
$$= \sum_{abcd} \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{ii'} \, (z'_a \ , \ z_c)_{V_\varepsilon} \, (w'_b \ , \ w_d)_{V_\gamma} = \sum_{abcd} \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{ii'} \, (z'_a \otimes w'_b \ , \ z_c \otimes w_d) =$$
$$= \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{ii'} \Big(T^{\delta j'}_{\varepsilon\gamma} \ v \ , \ T^{\delta j}_{\varepsilon\gamma} \ u \Big)_{V_\varepsilon \otimes V_\gamma} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{ii'} \Big(v \ , \ (T^{\delta j'}_{\varepsilon\gamma})^* T^{\delta j}_{\varepsilon\gamma} \ u \Big)_{V_\delta} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{ii'} \delta_{jj'} \, (v \ , \ u)_{V_\delta} \quad ,$$

ami a skalárszorzat tulajdonságai alapján ekvivalens az

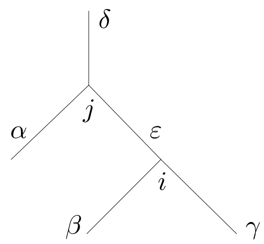
$$\big((T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{1}_\gamma) \circ T^{\delta j}_{\varepsilon\gamma}\big)^* \circ \big((T^{\varepsilon' i'}_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{1}_\gamma) \circ T^{\delta j'}_{\varepsilon'\gamma}\big) = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{ii'} \delta_{jj'} \mathbf{1}_\delta$$

egyenlőséggel. Egészen hasonló módon bizonyítható az állításban szereplő másik típusú bázis ortogonalitása is. ■

Ezekhez a bázisokhoz szintén egyszerű ábrákat tudunk rendelni:



$(T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{1}_\gamma) \circ T^{\delta j}_{\varepsilon\gamma}$



$(\mathbf{1}_\alpha \otimes T^{\varepsilon i}_{\beta\gamma}) \circ T^{\delta j}_{\alpha\varepsilon}$

2.2.3 **Megjegyzés.** A kétfajta bázis szerint a $\mathcal{T}^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$ Hilbert-tér dimenziója kétféleképpen írható fel, amiből

$$\sum_{\varepsilon} N^{\varepsilon}_{\alpha\beta}\, N^{\delta}_{\varepsilon\gamma} = \sum_{\varepsilon} N^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\, N^{\delta}_{\alpha\varepsilon} \quad .$$

2.2.4 **Definíció.** A kétfajta bázisból összeállítható

$$\left((T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta}\otimes \mathbf{1}_{\gamma})\circ T^{\delta j}_{\varepsilon\gamma}\right)^{*}\circ\left((\mathbf{1}_{\alpha}\otimes T^{\eta k}_{\beta\gamma})\circ T^{\delta l}_{\alpha\eta}\right)$$

$V_\delta \to V_\delta$ intertwiner az I. Schur-lemma alapján megint csak az identitás számszorosa lehet. (Görög betűk jelölik az egyes inekvivalens irreducibilis ábrázolásokat, a latin indexek pedig a megfelelő $\mathcal{T}$ intertwiner-terek bázisait indexelik.) Ezért definiálhatjuk az F *6j-szimbólumot* a következőképpen:

$$\mathbf{1}_{\delta}\cdot F\left(\begin{smallmatrix}\delta\\ \alpha\beta\gamma\end{smallmatrix}\right)^{\mathrm{i\,k}}_{\substack{\varepsilon\eta\\ \mathrm{j\,l}}} = \left((T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta}\otimes \mathbf{1}_{\gamma})\circ T^{\delta j}_{\varepsilon\gamma}\right)^{*}\circ\left((\mathbf{1}_{\alpha}\otimes T^{\eta k}_{\beta\gamma})\circ T^{\delta l}_{\alpha\eta}\right) \quad .$$

Ez a 6j-szimbólum tehát rögzített $\delta,\alpha,\beta,\gamma$ mellett egy komplex elemekből álló mátrixként képzelhető el, melynek "első indexe" az i,ε,j hármas, "második" a k,η,l hármas. Mivel két ortonormált bázisrendszer tagjaiból raktuk össze, $F\left(\begin{smallmatrix}\delta\\ \alpha\beta\gamma\end{smallmatrix}\right)$ unitér mátrix (azon az altéren, ahol az ε és η indexekben nem nulla).

2.2.5 **Példa.** Legyen $\mathcal{G}$ az n elemű Ábel-csoport:

$$\mathcal{G}=\{g_j\}_{j=0..n-1} \quad ; \quad g_j\cdot g_k = g_k\cdot g_j = g_{j+k\ (\mathrm{Mod}\ n)} \quad ; \quad g_0 := e \quad .$$

(Ábel-csoport esetén az elemek kommutálása miatt minden elem önmagában egy-egy konjugációs osztályt alkot, ezért a csoportnak annyi inekvivalens irreducibilis ábrázolása van, mint amennyi a rendje. Az ábrázolások dimenzióinak négyzetösszege kiadja a csoport rendjét, ezért Ábel-csoport minden irreducibilis ábrázolása egydimenziós, vagyis megegyezik a karakterével.) A csoport γ-adik irreducibilis ábrázolása – jelen esetben a γ-adik karaktere legyen ($\gamma = 0..n-1$; $j=0..n-1$; i a komplex egységgyök)

$$\chi_\gamma : \mathcal{G}\to\mathbb{C} \ ; \ g_j \mapsto e^{\frac{i2\pi}{n}\gamma j} \quad .$$

Ezek a karakterek annyian vannak, amennyi a csoport rendje, azaz konjugációs osztályainak száma, és tudják a megfelelő (1.3.2) ortonormáltsági relációkat:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\overline{\chi_\gamma(g_j)}\chi_\delta(g_j) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{i2\pi}{n}(\delta-\gamma)j} = \begin{cases} n, & \text{ha } \delta=\gamma, \\ \dfrac{e^{2i\pi(\delta-\gamma)}-1}{e^{\frac{2i\pi}{n}(\delta-\gamma)}-1} = 0, & \text{ha } \delta\neq\gamma. \end{cases}$$

Két ábrázolás tenzorszorzata ekvivalens egy harmadikkal:

$$\chi_\alpha\otimes\chi_\beta : g_j \mapsto e^{\frac{2i\pi}{n}\alpha j}\otimes e^{\frac{2i\pi}{n}\beta j} = e^{\frac{2i\pi}{n}(\alpha+\beta)j} = \chi_{\alpha+\beta}(g_j) \quad .$$

Ezért azt várjuk, hogy a $T^{\gamma}_{\alpha\beta}$ intertwiner akkor nem lesz nulla, ha $\alpha+\beta=\gamma$ (Mod n). Valóban, a $T^{\gamma}_{\alpha\beta} : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ lineáris leképzésnek az intertwinerek definíciója szerint $x\in\mathbb{C}$ esetén ki kell elégítenie a

$$(\chi_\alpha\otimes\chi_\beta)(g_j)\,T^{\gamma}_{\alpha\beta}(x) = \chi_{\alpha+\beta}(g_j)\,T^{\gamma}_{\alpha\beta}(x) = T^{\gamma}_{\alpha\beta}(\chi_\gamma(g_j)\,x) \quad ,$$

azaz az

$$e^{\frac{2i\pi}{n}(\alpha+\beta)j}\,T^{\gamma}_{\alpha\beta}(x) = T^{\gamma}_{\alpha\beta}(e^{\frac{2i\pi}{n}\gamma j}\,x) = e^{\frac{2i\pi}{n}\gamma j}\,T^{\gamma}_{\alpha\beta}(x)$$

egyenlőséget (az utolsó lépésben kihasználva T linearitását). Ezért $T^{\gamma}_{\alpha\beta}(x) = \delta^{\gamma}_{\alpha+\beta}\cdot u^{\gamma}_{\alpha\beta}\cdot x$ alakú, ahol T normáltsága miatt az $u^{\gamma}_{\alpha\beta}$ komplex szám egységnyi abszolút értékű. (Természetesen az

$\alpha+\beta$-hoz hasonló összegek Mod n értendők.) Jól látható, hogy a $\mathcal{T}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ tér csak egydimenziós, így ezen intertwiner teret indexelő latin indexre nincs szükségünk.
Nézzük meg most a $\mathcal{T}^{\gamma}_{\alpha\beta\varepsilon}$ tér feljebb definiált bázisait:

$$\left((T^{\eta}_{\alpha\beta}\otimes \mathbf{1}_{\varepsilon})\circ T^{\gamma}_{\eta\varepsilon}\right)(x) = u^{\eta}_{\alpha\beta}\delta^{\eta}_{\alpha+\beta}\, u^{\gamma}_{\eta\varepsilon}\delta^{\gamma}_{\eta+\varepsilon}\, x = u^{\eta}_{\alpha\beta}\, u^{\gamma}_{\eta\varepsilon}\, \delta^{\gamma}_{\alpha+\beta+\varepsilon}\delta^{\gamma}_{\eta+\varepsilon}\, x \quad ,$$

és

$$\left((\mathbf{1}_{\alpha}\otimes T^{\nu}_{\beta\varepsilon})\circ T^{\gamma}_{\alpha\nu}\right)(x) = u^{\nu}_{\beta\varepsilon}\delta^{\nu}_{\beta+\varepsilon}\, u^{\gamma}_{\alpha\nu}\delta^{\gamma}_{\alpha+\nu}\, x = u^{\nu}_{\beta\varepsilon}\, u^{\gamma}_{\alpha\nu}\, \delta^{\gamma}_{\alpha+\beta+\varepsilon}\delta^{\gamma}_{\alpha+\nu}\, x \quad .$$

A $\mathcal{T}^{\gamma}_{\alpha\beta\varepsilon}$ tér is egydimenziós, hiszen az első bázisban η, a másodikban ν csak egyetlen értékére lesz a bázisvektor nullától különböző. Ezért triviális módon teljesül a fenti bázisok ortonormáltsága.
A megfelelő 6j-szimbólum definíciója szerint

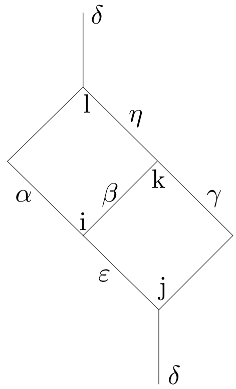
$$\mathbf{1}_{\gamma}\cdot F\left(\begin{smallmatrix}\gamma\\ \alpha\beta\varepsilon\end{smallmatrix}\right)^{\eta\nu} = \left((T^{\eta}_{\alpha\beta}\otimes \mathbf{1}_{\varepsilon})\circ T^{\gamma}_{\eta\varepsilon}\right)^{*}\circ\left((\mathbf{1}_{\alpha}\otimes T^{\nu}_{\beta\varepsilon})\circ T^{\gamma}_{\alpha\nu}\right) = \mathbf{1}_{\gamma}\cdot\overline{u^{\eta}_{\alpha\beta}\, u^{\gamma}_{\eta\varepsilon}}\, u^{\nu}_{\beta\varepsilon}\, u^{\gamma}_{\alpha\nu}\, \delta^{\gamma}_{\alpha+\beta+\varepsilon}\delta^{\gamma}_{\eta+\varepsilon}\delta^{\gamma}_{\alpha+\nu}$$

egy 1×1-es mátrix (amikor $\eta=\gamma-\varepsilon$ és $\nu=\gamma-\alpha$), és az u szorzók unitérsége miatt ezen az altéren unitér. ■

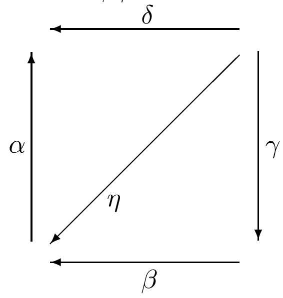
A $\mathcal{T}^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$ tér bázisaihoz hasonlóan 6j-szimbólumait is ábrákkal reprezentáljuk. Ha

$$\mathbf{1}_{\delta}\cdot F\left(\begin{smallmatrix}\delta\\ \alpha\beta\gamma\end{smallmatrix}\right)^{\begin{smallmatrix}\mathrm{i}\,\mathrm{k}\\ \varepsilon\eta\\ \mathrm{j}\,\mathrm{l}\end{smallmatrix}} = \left((T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta}\otimes \mathbf{1}_{\gamma})\circ T^{\delta j}_{\varepsilon\gamma}\right)^{*}\circ\left((\mathbf{1}_{\alpha}\otimes T^{\eta k}_{\beta\gamma})\circ T^{\delta l}_{\alpha\eta}\right) \quad ,$$

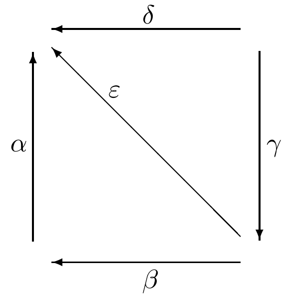
akkor $F\left(\begin{smallmatrix}\delta\\ \alpha\beta\gamma\end{smallmatrix}\right)^{\begin{smallmatrix}\mathrm{i}\,\mathrm{k}\\ \varepsilon\eta\\ \mathrm{j}\,\mathrm{l}\end{smallmatrix}}$ -hoz a bázisvektor konjugálását fordított állású ábrával figyelembe véve a következőt rendeljük:



A továbbiakban a $\mathcal{T}^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$ tér bázisainak és az $F\left(\begin{smallmatrix}\delta\\ \alpha\beta\gamma\end{smallmatrix}\right)^{\begin{smallmatrix}\mathrm{i}\,\mathrm{k}\\ \varepsilon\eta\\ \mathrm{j}\,\mathrm{l}\end{smallmatrix}}$ mátrixnak másfajta ábráit fogjuk használni:

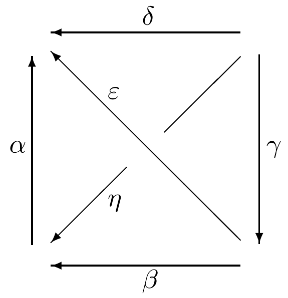


$(\mathbf{1}_{\alpha}\otimes T^{\eta k}_{\beta\gamma})\circ T^{\delta l}_{\alpha\eta}$



$(T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta}\otimes \mathbf{1}_{\gamma})\circ T^{\delta j}_{\varepsilon\gamma}$

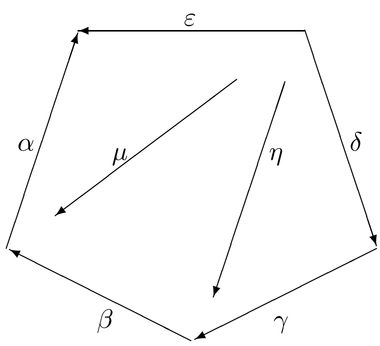
Az ezekből összerakható F mátrix ábrája pedig



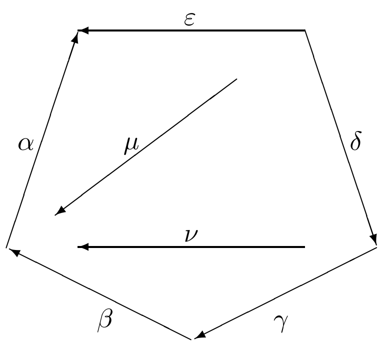
$$F\left(\begin{smallmatrix}\delta\\ \alpha\beta\gamma\end{smallmatrix}\right)^{\mathrm{i}\,\mathrm{k}}_{\substack{\varepsilon\eta\\ \mathrm{j}\,\mathrm{l}}} = \left((T^{\varepsilon i}_{\alpha\beta}\otimes \mathbf{1}_\gamma)\circ T^{\delta j}_{\varepsilon\gamma}\right)^* \circ \left((\mathbf{1}_\alpha \otimes T^{\eta k}_{\beta\gamma})\circ T^{\delta l}_{\alpha\eta}\right)$$

Ezekben az ábrákban tehát pl. a $T^{\delta j}_{\varepsilon\gamma}$ intertwinernek egy háromszög felel meg $\delta, \varepsilon, \gamma$ jelű oldalakkal, melyek nyilazása mindkét úton a δ oldal egyik végpontjától a másik felé mutat. Az intertwiner j indexét az egész háromszög viseli. E rajzok szerint is szemléletes az F mátrix hatása: a bal oldali ábra úgy kapható, hogy a jobb oldalit (jobbról) szorozzuk az F mátrixnak megfelelő ábrával, és összegzünk az ábrákból eltűnő ε indexre, valamint az ε oldal eltűnésével megszűnő két háromszög latin indexére.

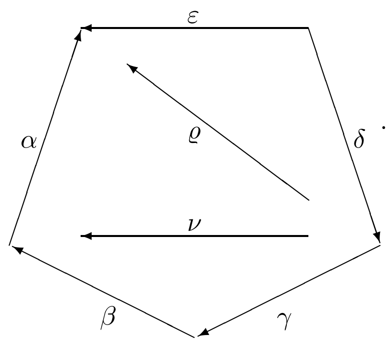
Ilyen ábrák segítségével írhatók fel az úgynevezett *pentagon-egyenletek*. Tekintsük a $\mathcal{T}^{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ $V_\varepsilon \to V_\alpha \otimes V_\beta \otimes V_\gamma \otimes V_\delta$ intertwinerek terét. Ebben többfajta bázis építhető fel eddigi egyszerű bázisainkból. A kiindulásunk legyen az



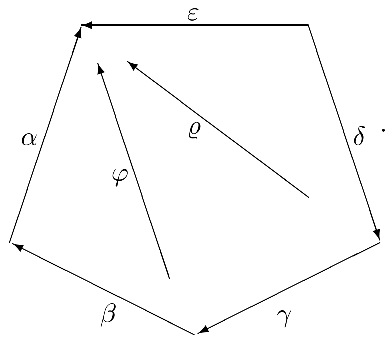
intertwiner (az egyes háromszögek latin indexeit nem írtuk ki). Ez megegyezik az



intertwiner és az $F\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \beta\gamma\delta\end{smallmatrix}\right)^{\nu\eta}$ mátrix szorzatával, összegezve a ν indexre, és F ν alatt és felett ki nem írt latin indexeire. Ebben a lépésben tehát a μ β γ δ négyszögnek megfelelő F mátrixszal tértünk át az egyik fajta $\mathcal{T}^{\mu}_{\beta\gamma\delta}$-beli bázisról a másik fajtára. Az eljárást újabb négyszögekre alkalmazva az eredeti intertwiner tovább egyenlő

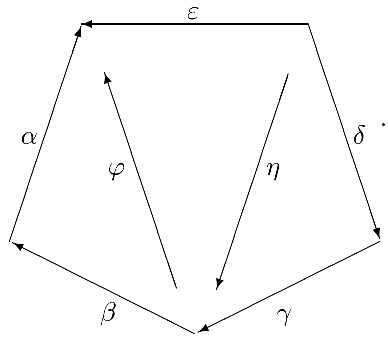


$$\cdot F\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \alpha\nu\delta\end{smallmatrix}\right)^{\varrho\mu} \cdot F\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \beta\gamma\delta\end{smallmatrix}\right)^{\nu\eta} =$$

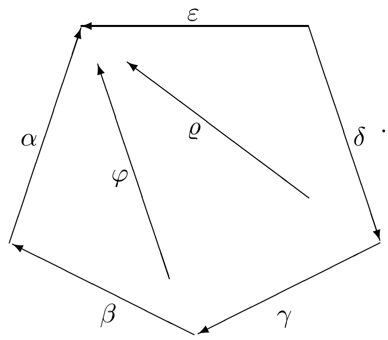


$$\cdot F\left(\begin{smallmatrix}\varrho\\ \alpha\beta\gamma\end{smallmatrix}\right)^{\varphi\nu} \cdot F\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \alpha\nu\delta\end{smallmatrix}\right)^{\varrho\mu} \cdot F\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \beta\gamma\delta\end{smallmatrix}\right)^{\nu\eta} .$$

Azonban az eredeti intertwinert más úton is alakíthatjuk; így az =



$$\cdot F\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \alpha\beta\eta\end{smallmatrix}\right)^{\varphi\mu} =$$



$$\cdot F\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varphi\gamma\delta\end{smallmatrix}\right)^{\varrho\eta} \cdot F\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \alpha\beta\eta\end{smallmatrix}\right)^{\varphi\mu} .$$

A kétféle eredmény összehasonlításából

$$F\left(\begin{smallmatrix}\varrho\\ \alpha\beta\gamma\end{smallmatrix}\right)^{\varphi\nu} \cdot F\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \alpha\nu\delta\end{smallmatrix}\right)^{\varrho\mu} \cdot F\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \beta\gamma\delta\end{smallmatrix}\right)^{\nu\eta} = F\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varphi\gamma\delta\end{smallmatrix}\right)^{\varrho\eta} \cdot F\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \alpha\beta\eta\end{smallmatrix}\right)^{\varphi\mu} \quad ,$$

ezt hívják pentagon-egyenletnek. Az eljárás során és így a pentagon-egyenletben is összegezni kell a ν közben megjelent majd eltűnt élre, valamint az általa keletkezett új majd eltűnő háromszögek ki nem írt latin indexeire.

2.3. A rigiditás intertwinerek

2.3.1 **Definíció.** A $(\mathfrak{C}, \circ, \otimes)$ reprezentáció kategóriában legyen V és $\widehat{V}$ objektum. Ha I a monoidális egység (2.1.4), és létezik egy

$$R_V \;:\; I \to \widehat{V} \otimes V \quad \text{és egy} \quad \widehat{R_V} \;:\; I \to V \otimes \widehat{V}$$

intertwiner úgy, hogy

$$(\widehat{R_V}^* \otimes \mathbf{1}_V) \circ (\mathbf{1}_V \otimes R_V) = \mathbf{1}_V \quad \text{és} \quad (\mathbf{1}_{\widehat{V}} \otimes \widehat{R_V}^*) \circ (R_V \otimes \mathbf{1}_{\widehat{V}}) = \mathbf{1}_{\widehat{V}} \quad ,$$

akkor $\widehat{V}$ a V objektum *konjugáltja* vagy *duálisa*, és R_V a *rigiditás intertwiner*.

2.3.2 **Példa.** Legyen $\widehat{u_i}$ illetve u_i a $\widehat{V}$ illetve V egyforma dimenziós terek bázisa, és

$$R_V \;:\; I \to \widehat{V} \otimes V \;;\; \lambda \mapsto \lambda \sum_i \widehat{u_i} \otimes u_i \quad .$$

Koordinátázzuk le a V és $\widehat{V}$ tereket, így megkaphatjuk a ${}_{\mathcal{G}}V$ modulus D_V mátrixábrázolását, valamint R koordinátázott alakját: $R^{\hat{i}i} = \delta^{\hat{i}i}$. $\widehat{V}$-n (pontosabban koordinátázott alakján) bevezetjük D_V *kontragradiens ábrázolását*:

$$D_{\widehat{V}} :\; g \mapsto \widetilde{D_V(g)} := D_V(g^{-1})^{\mathsf{T}} \quad ,$$

ahol D^{T} a mátrix transzponáltját jelöli. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban ábrázolása a csoportnak. Legyen továbbá a ${}_{\mathcal{G}}I$ monoidális egység a triviális (minden csoportelemhez egyet rendelő) ábrázolás $\mathbb{C}$-n. Ekkor

$$(D_{\widehat{V}\otimes V}(g)\; R)^{\hat{j}j} = \left(\sum_i D_{\widehat{V}}(g)\widehat{u_i} \otimes D_V(g)u_i \right)^{\hat{j}j} = \big(D_{\widehat{V}}(g)\big)^{\hat{j}i}\big(D_V(g)\big)^{ji} =$$

$$= \big(D_V(g^{-1})\big)^{i\hat{j}}\big(D_V(g)\big)^{ji} = \big(D_V(gg^{-1})\big)^{j\hat{j}} = \delta^{j\hat{j}} = R^{\hat{j}j} = R^{\hat{j}j} \cdot D_I(g) \quad ,$$

ezért ez a leképzés intertwiner. Létezik hozzá a megfelelő $\widehat{R_V}$ intertwiner is:

$$\widehat{R_V} \;:\; I \to V \otimes \widehat{V} \;;\; \lambda \mapsto \lambda \sum_i u_i \otimes \widehat{u_i} \quad ,$$

mert

$$(\widehat{R_V}^* \otimes \mathbf{1}_V) \circ (\mathbf{1}_V \otimes R_V) \left(\sum_i \lambda_i u_i \right) = (\widehat{R_V}^* \otimes \mathbf{1}_V) \circ (\mathbf{1}_V \otimes R_V) \left(\sum_i u_i \otimes \lambda_i \right) =$$

$$= (\widehat{R_V}^* \otimes \mathbf{1}_V) \left(\sum_i u_i \otimes \left(\lambda_i \sum_j \widehat{u_j} \otimes u_j \right) \right) =$$

$$= \sum_i \sum_j \lambda_i \widehat{R_V}^* (u_i \otimes \widehat{u_j}) \otimes u_j = \sum_i \sum_j \lambda_i \delta_{ij} u_j = \sum_i \lambda_i u_i \quad ,$$

és hasonló módon a másik megkövetelt egyenlőség is teljesül. ■

2.3.3 **Állítás.** Ha a V modulusnak $\widehat{V_1}$ és $\widehat{V_2}$ is konjugáltja, akkor $\widehat{V_1}$ és $\widehat{V_2}$ ekvivalensek. ■

2.3.4 **Állítás.** Egy véges dimenziós ábrázolásokat tartalmazó reprezentáció kategóriában ha a csoport kompakt (pl. véges), akkor minden V objektumnak létezik konjugáltja. ■

2.3.5 **Megjegyzés.** A rigiditás intertwinerekre $R_V^* \circ R_V = \widehat{R}_V^* \circ \widehat{R} = d_V \cdot \mathbf{1}_I$ teljesül, ahol d_V a V ábrázolási tér dimenziója. A 2.3.2 példában szereplő R-ek mátrixalakjaira ez az állítás könnyen ellenőrizhető. Ez a tény lehetővé teszi, hogy a reprezentáció kategóriák absztrakt elméletében az objektumok dimenzióját a rigiditás intertwinerek megfelelő választása után segítségükkel definiálják. Az így definiált dimenziók az eddig megszokott módon, additívan illetve multiplikatívan viselkednek direktösszeg- illetve direktszorzatképzés esetén, valamint a monoidális egység dimenziójára egyet adnak.

3. Az S_3 csoport 6j-szimbólumai

Az eddig elmondottak szépen illusztrálhatók az S_3 csoporttal kapcsolatban, mivel az egy nem túl bonyolult, de már nem ábeli csoport. Ebben a fejezetben választ keresünk arra a kérdésre, hogy mennyire határozzák meg a csoportot pentagon-egyenletei.

3.1. A 6j-szimbólumok

Az 1.2.13 példában láttuk az S_3 csoport irreducibilis ábrázolásait. Az egyszerűség kedvéért nevezzük az ottani V ábrázolást V_0-nak, V'-t V_1-nek, és U-t V_2-nek. (Az ottani U' ábrázolás V_2-vel ekvivalens.) Legyen V_0 bázisa $\{v_0\}$, V_1-é $\{v_1\}$ és V_2-é $\{u_1, u_2\}$. Az 1.2.23 példában pedig a csoport fúziós gyűrűjét írtuk fel:

$$\begin{array}{c|ccc} \otimes & V_0 & V_1 & V_2 \\ \hline V_0 & V_0 & V_1 & V_2 \\ V_1 & V_1 & V_0 & V_2 \\ V_2 & V_2 & V_2 & V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \end{array} .$$

Ez alapján a $\mathcal{T}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ tér minden $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2$ esetén legfeljebb egydimenziós, hiszen bármelyik fenti szorzatban egy irreducibilis ábrázolás legfeljebb egyszer fordul elő. Ezért nincs szükség a bázisok latin betűs indexeire. A következő bázisok nem lesznek különbözők nullától ($\lambda, a, b \in \mathbb{C}$):

$$T^0_{00} : \lambda v_0 \mapsto \lambda v_0 \otimes v_0$$
$$T^0_{11} : \lambda v_0 \mapsto \lambda v_1 \otimes v_1$$
$$T^0_{22} : \lambda v_0 \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(u_1 \otimes u_2 + u_2 \otimes u_1)$$
$$T^1_{10} : \lambda v_1 \mapsto \lambda v_1 \otimes v_0$$
$$T^1_{01} : \lambda v_1 \mapsto \lambda v_0 \otimes v_1$$
$$T^1_{22} : \lambda v_1 \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(u_1 \otimes u_2 - u_2 \otimes u_1)$$
$$T^2_{02} : au_1 + bu_2 \mapsto av_0 \otimes u_1 + bv_0 \otimes u_2$$
$$T^2_{20} : au_1 + bu_2 \mapsto au_1 \otimes v_0 + bu_2 \otimes v_0$$
$$T^2_{12} : au_1 + bu_2 \mapsto av_1 \otimes u_1 - bv_1 \otimes u_2$$
$$T^2_{21} : au_1 + bu_2 \mapsto au_1 \otimes v_1 - bu_2 \otimes v_1$$
$$T^2_{22} : au_1 + bu_2 \mapsto au_2 \otimes u_2 + bu_1 \otimes u_1$$

Ezeket az eredményeket az 1.2.23 példában kaptuk; az ottani u'_1-t U és U' azonosítása miatt u_1-nek, u'_2-t $-u_2$-nek kell tekintenünk.

Ezekből a bázisokból felépítve a 6j-szimbólumokat a következők különböznek nullától:

$$\begin{aligned}
1 &= F\tbinom{0}{000}^{00} = F\tbinom{1}{001}^{01} = F\tbinom{1}{010}^{11} = F\tbinom{1}{100}^{10} = F\tbinom{0}{011}^{10} = F\tbinom{0}{101}^{11} = F\tbinom{0}{110}^{01} = \\
&= F\tbinom{1}{111}^{00} = F\tbinom{2}{002}^{02} = F\tbinom{2}{012}^{12} = F\tbinom{2}{102}^{12} = F\tbinom{2}{112}^{02} = F\tbinom{2}{020}^{22} = F\tbinom{2}{021}^{22} = \\
&= F\tbinom{2}{120}^{22} = F\tbinom{2}{121}^{22} = F\tbinom{2}{200}^{20} = F\tbinom{2}{201}^{21} = F\tbinom{2}{210}^{21} = F\tbinom{2}{211}^{20} = F\tbinom{0}{022}^{20} = \\
&= F\tbinom{1}{022}^{21} = F\tbinom{2}{022}^{22} = F\tbinom{0}{122}^{21} = F\tbinom{1}{122}^{20} = F\tbinom{0}{202}^{22} = F\tbinom{1}{202}^{22} = F\tbinom{2}{202}^{22} = \\
&= F\tbinom{2}{212}^{22} = F\tbinom{0}{220}^{02} = F\tbinom{1}{220}^{12} = F\tbinom{2}{220}^{22} = F\tbinom{0}{222}^{22} \ ; \\
-1 &= F\tbinom{2}{122}^{22} = F\tbinom{0}{212}^{22} = F\tbinom{1}{212}^{22} = F\tbinom{0}{221}^{12} = F\tbinom{1}{221}^{02} = F\tbinom{2}{221}^{22} = F\tbinom{1}{222}^{22} \ ;
\end{aligned}$$

$$\left(F\tbinom{2}{222}^{\alpha\beta}\right)_{(\alpha,\beta=0,1,2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} .$$

3.2. Az S_3 csoport pentagon-egyenletei

Felmerül a kérdés, vajon teljesítik-e ezek a 6j-szimbólumok a pentagon-egyenleteket, illetve az S_3 csoportra felírt pentagon-egyenleteknek van-e a fentin kívül más megoldásuk a 6j-szimbólumokra nézve. A csoport fúziós gyűrűjét vizsgálva könnyedén megállapítható, hogy három irreducibilis ábrázolás szorzatában melyek direktösszege található meg, illetve hogy az F szimbólumoknak megfelelő áttérések során az egyes négyszögek milyen $\mathcal{T}^{\alpha}_{\beta\gamma}$-beli bázisoknak megfelelő háromszögekre bonthatók. Ilymódon a 6j-szimbólumok ismerete nélkül tudhatjuk, melyek lesznek biztosan nullák. (Ezen felül még kiderülhet egyes F mátrixok bizonyos elemeinek nullasága, gondoljunk csak $F\binom{2}{222}_{22}$ -re.) Ilyen elvek alapján írható fel és oldható meg az S_3 csoport 250 darab pentagon-egyenlete. A megoldás az A, B, C, D, E, F, G, H nyolc darab tetszőleges egységnyi hosszúságú komplex szám segítségével adható meg (a komplex konjugálást * jelöli):

$+1 = F\binom{0}{222}_{22} = F\binom{0}{000}_{00} = F\binom{1}{010}_{11} = F\binom{2}{020}_{22} = F\binom{2}{021}_{22} = F\binom{2}{022}_{22} = F\binom{2}{120}_{22} =$
$= F\binom{2}{220}_{22} = F\binom{2}{121}_{22}$;
$-1 = F\binom{2}{122}_{22} = F\binom{2}{221}_{22} = F\binom{1}{222}_{22}$;
$0 = F\binom{2}{222}_{22}$;
$A = F\binom{1}{001}_{01} = F\binom{0}{011}_{10}{}^*$;
$B = F\binom{2}{002}_{02} = F\binom{0}{022}_{20}{}^*$;
$C = -F\binom{1}{212}_{22} = -F\binom{0}{212}_{22} = F\binom{2}{212}_{22}$;
$D = F\binom{2}{200}_{20} = F\binom{0}{220}_{02}{}^*$;
$E = F\binom{2}{112}_{02}$;
$F = F\binom{0}{122}_{21}$;
$G = F\binom{0}{110}_{01} = F\binom{1}{100}_{10}{}^*$;
$\frac{1}{\sqrt{2}}H = F\binom{2}{222}_{02}$;
$A^*B = F\binom{2}{012}_{12} = F\binom{1}{022}_{21}{}^*$;
$BD = F\binom{1}{202}_{22} = F\binom{0}{202}_{22} = F\binom{2}{202}_{22}$;
$GD = F\binom{2}{210}_{21} = F\binom{1}{220}_{12}{}^*$;
$AG^* = F\binom{0}{101}_{11} = F\binom{1}{111}_{00}{}^*$;
$BG^* = F\binom{2}{102}_{12}$;
$AD = F\binom{2}{201}_{21}$;
$C^*A^*BFE = -F\binom{1}{221}_{02}$;
$C^2D^*B^*E^* = F\binom{2}{211}_{20}$;
$C^*F^* = -F\binom{0}{221}_{12}$;
$GB^*E^*F^* = F\binom{1}{122}_{20}$;
$\frac{1}{2}D^*B^* = F\binom{2}{222}_{00}$;
$\frac{1}{2}FC^*E = -F\binom{2}{222}_{01}$;
$\frac{1}{2}D^*B^*E^*F^* = F\binom{2}{222}_{10}$;
$\frac{1}{2}C^* = -F\binom{2}{222}_{11}$;
$\frac{1}{\sqrt{2}}HE^*F^* = -F\binom{2}{222}_{12}$;
$\frac{1}{\sqrt{2}}D^*B^*H^* = F\binom{2}{222}_{20}$;
$\frac{1}{\sqrt{2}}FC^*EH^* = F\binom{2}{222}_{21}$.

Az S_3 csoport feljebb kapott 6j-szimbólumai természetesen megoldások, rájuk $A = B = C = D = E = F = G = H = 1$ érvényes. A $T^{\alpha}_{\beta\gamma}$ bázisok fázisa nem rögzített, bármelyiket megszorozhatjuk egy egységnyi komplex szorzóval. Attól függően, hogy egyes 6j-szimbólumokban mely bázisok szerepelnek, ezek az egységnyi szorzók megjelennek a 6j-szimbólumok előtt is. Ha ezek a szorzók két 6j-szimbólum előtt ugyanolyanok, akkor az a két szimbólum tetszőleges bázisválasztás esetén meg kell, hogy egyezzen. Hasonlóan látható, hogy mely szimbólumoknak kell bármely bázis esetén rögzített számoknak lenniük (pl. 1, -1 vagy 0), és hogy mely szimbólumok szorzata adhat ki tetszőleges bázisban egy újabb szimbólumot. Ha mindezt az S_3 csoportra figyelembe vesszük, akkor az előző pentagon-megoldásokhoz nem kapunk újabb egyenleteket, ami azt jelenti, hogy az S_3 csoport 6j-szimbólumainak összetételét a pentagon-egyenletek (a fenti unitér bázistranszformáció erejéig) rögzítik.

4. Véges csoportszimmetriák a kvantumelméletben

Kvantumtérelméletben a fizikát operátorokkal írjuk le, melyek egy algebrát alkotnak. Az elmélet diszkrét szimmetriáit véges csoportokkal modellezzük, melyek valamilyen módon hatnak ezen az algebrán. Ebben a fejezetben az ilyen szimmetriákkal kapcsolatos néhány alapfogalmat ismertetünk.

4.1. Az invariáns részalgebra

4.1.1 **Definíció.** Legyen $\mathcal{M}$ $*$-algebra, azaz algebra $\mathbb{C}$ felett egy $* : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$; $a \mapsto a^*$ *antilineáris involúcióval*, azaz olyan antilineáris leképzéssel, melynek négyzete az identitás, és $a, b \in \mathcal{M}$ esetén $(ab)^* = b^* a^*$. ($\mathcal{M}$-et $\mathbb{C}^*$-*algebrának* nevezzük, ha mindezeken kívül norma is adott rajta, és teljes e norma szerint.) Ha $\mathcal{G}$ véges csoport, és Aut$\mathcal{M}$ az $\mathcal{M}$ $*$-automorfizmusainak csoportja (olyan automorfizmusok, melyek felcserélhetők a $*$ leképzéssel), akkor egy $\gamma : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}\mathcal{M}$; $g \mapsto \gamma_g$ leképzést a $\mathcal{G}$ *csoport hatásának* hívunk $\mathcal{M}$-en, amennyiben minden $h, g \in \mathcal{G}$ elemre $\gamma_g \circ \gamma_h = \gamma_{gh}$.

4.1.2 **Definíció.** Legyen $\mathcal{M}$ $*$-algebra, γ pedig a $\mathcal{G}$ csoport hatása rajta. Ekkor az $\mathcal{M}$ algebra γ-*invariáns részalgebrája* vagy *fixpont algebrája* az

$$\mathcal{M}^\gamma := \big\{ a \in \mathcal{M} \mid (\forall g \in \mathcal{G})\ \gamma_g(a) = a \big\}$$

halmaz az $\mathcal{M}$ algebra műveleteinek leszűkítéseivel ellátva.

A kvantumtérelméletekben $\mathcal{M}$ – melyet néha $\mathcal{F}$-el fogunk jelölni – felel meg az elmélet téralgebrájának, és $\mathcal{G}$-t a természet egy szimmetriájaként értelmezve $\mathcal{M}^\gamma$ – a továbbiakban néha $\mathcal{A}$ – felel meg az elmélet $\mathcal{G}$-szimmetrikus megfigyelhető részének.

4.1.3 **Definíció.** Az eddigi jelölésekkel az *átlagolás* az

$$E\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{M}^\gamma \ ;\ m \mapsto \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathcal{G}} \gamma_g(m)$$

leképzés (n a csoport rendje).

4.1.4 **Állítás.** $a, b \in \mathcal{M}^\gamma$; $m \in \mathcal{M}$ esetén az E átlagolásra

(i) $E\langle \mathcal{M} \rangle = \mathcal{M}^\gamma$;
(ii) $E \circ E = E$;
(iii) $E(amb) = aE(m)b$;
(iv) egységelemes $\mathcal{M}$ algebra esetén $E(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$

teljesül.

Bizonyítás. (i) $m \in \mathcal{M}$, $h \in \mathcal{G}$ esetén

$$\gamma_h\big(E(m)\big) = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathcal{G}} \gamma_h\big(\gamma_g(m)\big) = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathcal{G}} \gamma_{hg}(m) = \frac{1}{n} \sum_{h^{-1}g'} \gamma_{g'}(m) = \frac{1}{n} \sum_{g'} \gamma_{g'}(m) = E(m) \quad ,$$

ezért $E\langle \mathcal{M} \rangle \subset \mathcal{M}^\gamma$. Fordítva, $a \in \mathcal{M}^\gamma \subset \mathcal{M}$ esetén

$$a = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathcal{G}} a = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathcal{G}} \gamma_g(a) = E(a) \quad ,$$

ezért $\mathcal{M}^\gamma \subset E\langle \mathcal{M} \rangle$.
(ii) Az imént láttuk, hogy $a \in \mathcal{M}^\gamma$ esetén $E(a) = a$, ezért $E(m) \in E\langle \mathcal{M} \rangle = \mathcal{M}^\gamma$ miatt $E(m)$-re hatva E identitásként viselkedik.

(iii) γ_g homomorfizmus voltát felhasználva

$$E(amb) = \frac{1}{n}\sum_g \gamma_g(amb) = \frac{1}{n}\sum_g \gamma_g(a)\gamma_g(m)\gamma_g(b) = \frac{1}{n}\sum_g a\gamma_g(m)b = aE(m)b \quad .$$

(iv) ismét γ_g homomorfizmusságát kihasználva $\gamma_g(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, ezért $\mathbf{1} \in \mathcal{M}^\gamma$, így $E(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. ■

4.1.5 **Definíció.** A $\mathcal{G}$ véges csoportnak $\mathcal{H}$ *normális részcsoportja*, ha részcsoportja, és minden $g \in \mathcal{G}$ elemre $g\mathcal{H} = \mathcal{H}g$. A $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ *faktorcsoport* a $g\mathcal{H}$ alakú halmazok halmaza, amikor g befutja a csoportot.

A $\mathcal{H}$ halmaz és a csoport bármely g elemének "kommutálása" miatt ez valóban csoport lesz: $g\mathcal{H} \cdot g'\mathcal{H} = gg'\mathcal{H} \cdot \mathcal{H} = (gg')\mathcal{H}$. A $g\mathcal{H}$ és $g'\mathcal{H}$ halmazok megegyeznek vagy diszjunktak, és az egész csoport lefedhető $g\mathcal{H}$ alakú halmazokkal, ezért a csoport rendje osztható $\mathcal{H}$ rendjével, és hányadosuk a faktorcsoport rendje.

Legyen $\mathcal{H}$ a $\mathcal{G}$ csoport normális részcsoportja, és γ a csoport hatása az $\mathcal{M}$ algebrán. Jelöljük a $\mathcal{G}$ csoportra invariáns részalgebrát $\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$-vel, a $\mathcal{H}$-ra invariáns részalgebrát $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$-val. Ekkor $\mathcal{M}^{\mathcal{G}} \subset \mathcal{M}^{\mathcal{H}} \subset \mathcal{M}$. Definiáljuk a faktorcsoport hatását $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$-n: $\gamma_{g\mathcal{H}} \, : \, \mathcal{M}^{\mathcal{H}} \to \mathrm{Aut}\mathcal{M}\, ; \, a \mapsto \gamma_g(a)$. Ez a definíció konzisztens γ csoporthatás-tulajdonságával, hiszen $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$-n a $\mathcal{H}$ részcsoport bármely h elemére γ_h identitásként viselkedik. $\gamma_{g\mathcal{H}}$ segítségével a faktorcsoport átlagolása is bevezethető:

$$E_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \, : \, \mathcal{M}^{\mathcal{H}} \to \mathcal{M}^{\mathcal{H}} \, ; \, m \mapsto \frac{1}{n_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}} \sum_{g\mathcal{H}\in\mathcal{G}/\mathcal{H}} \gamma_{g\mathcal{H}}(m) \quad .$$

4.1.6 **Állítás.** Az előbbi jelölések mellett ha $E_{\mathcal{H}}$ a $\mathcal{H}$ normális részcsoport szerinti és $E_{\mathcal{G}}$ a teljes csoport szerinti átlagolás, akkor $E_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \circ E_{\mathcal{H}} = E_{\mathcal{G}}$.
Bizonyítás. $m \in \mathcal{M}$ esetén

$$\begin{aligned}(E_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \circ E_{\mathcal{H}})(m) &= \frac{1}{n_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}} \sum_{g\mathcal{H}\in\mathcal{G}/\mathcal{H}} \gamma_{g\mathcal{H}}\big(E_{\mathcal{H}}(m)\big) = \frac{1}{n_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}} \sum_{g\mathcal{H}\in\mathcal{G}/\mathcal{H}} \gamma_g\big(E_{\mathcal{H}}(m)\big) = \\ &= \frac{1}{n_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}}\frac{1}{n_{\mathcal{H}}} \sum_{g\mathcal{H}\in\mathcal{G}/\mathcal{H}} \sum_{h\in\mathcal{H}} \gamma_g\big(\gamma_h(m)\big) = \frac{1}{n_{\mathcal{G}}} \sum_{gh\in\mathcal{G}} \gamma_{gh}(m) = E_{\mathcal{G}}(m) \quad . \quad ■\end{aligned}$$

4.1.7 **Definíció.** Legyen Γ az $\mathcal{M}$ algebra automorfizmusa. Γ-t *belsőnek* nevezzük, ha létezik olyan $u \in \mathcal{M}$ elem, melyre $uu^* = u^*u = \mathbf{1}$, és $\mathrm{Ad}_u(m) := u\, m\, u^* = \Gamma(m)$ minden $m \in \mathcal{M}$-re. Ha egy automorfizmus nem belső, akkor *külsőnek* nevezzük.

4.1.8 **Definíció.** Ha γ a $\mathcal{G}$ csoport hatása $\mathcal{M}$-en, akkor ezt a hatást *külsőnek* nevezzük, amennyiben a γ_g automorfizmus pontosan akkor belső, ha $g = e$.

4.1.9 **Megjegyzés.** Ha az $\mathcal{M}$ algebra ábeli, azaz bármely két eleme kommutál egymással, akkor minden belső automorfizmusa az identitás leképzés. Egy ilyen algebrán tehát a γ csoporthatás külső volta pontosan azt jelenti, hogy $g \neq e$ esetén $\gamma_g \neq \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$.

4.1.10 **Példa.** Legyen

$$\mathcal{M} := \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\} \quad ,$$

és

$$\Gamma \, : \, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad .$$

Az $\mathcal{M}$ algebra kommutatív, és Γ nem az identitás rajta, tehát Γ nem belső automorfizmus. Azonban $\mathcal{M}$ része az $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 2×2-es komplex mátrixok algebrájának. Ezen az $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix segítségével definiálva a $\Gamma_0 := \mathrm{Ad}_u$ automorfizmust azt látjuk, hogy $\Gamma = \Gamma_0|_{\mathcal{M}}$. Itt tehát azt a gyakran előforduló esetet tapasztaltuk, hogy egy nagyobb algebra belső automorfizmusa leszűkítve egy részalgebrára külsővé válik. ■

4.1.11 **Tétel.** (Skolem-Noether tétel) Teljes mátrixalgebra minden automorfizmusa belső. ■

4.1.12 **Példa.** Legyen $\mathcal{M}$ teljes mátrixalgebrák direktösszege, és rajta Γ automorfizmus. Amennyiben Γ belső, akkor nyilvánvaló, hogy $\Gamma|_{\mathrm{centr}\mathcal{M}} = \mathbf{1}_{\mathrm{centr}\mathcal{M}}$. Fordítva, ha Γ az algebra centrumán identitásként viselkedik, akkor Γ nem keveri egymással a direktösszegben szereplő mátrixalgebrák elemeit, hiszen $\mathcal{M}$ centruma az egyes mátrixalgebrák egységmátrixai számszorosainak direktösszegéből áll. Ezért ekkor Γ előállítható az egyes mátrixalgebrákon ható automorfizmusok kompozíciójaként, melyek viszont az előbbi tétel alapján biztosan belsők. ■

4.2. A kvantumtérelmélet megfigyelhető algebrája

Most ahhoz a kérdéshez próbálunk közelíteni, hogyan lehet a szimmetriacsoportra következtetni pusztán az invariáns, azaz megfigyelhető algebra ismeretében. Ezt az első pillanatban meglepő eljárást az teszi lehetővé, hogy a megfigyelhető algebrának lokális szerkezete van. Az alábbiakban 1 térdimenziós rács térelméletben illusztráljuk csoportok hatását, és a megfigyelhető algebra struktúráját.

Egydimenziós modellekben a megfigyelhető mennyiségek operátorai egy $\mathcal{A}$ $\mathbb{C}^*$-algebrát (4.1.1), a *megfigyelhető algebrát* alkotják, amely az egydimenziós térnek megfelelően lokális szerkezettel is rendelkezik. Ha $I \subset \mathbb{R}$ illetve rácsmodellek esetén $I \subset \mathbb{Z}$ a tér egy intervallumának felel meg, akkor ezekben a modellekben ehhez létezik $\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{A}$ *lokális algebra* (rácsmodellek esetén) a következő tulajdonságokkal:

(i) $\bigcup_{I \subset \mathbb{Z}} \mathcal{A}(I) = \mathcal{A}$;

(ii) (izotónia) ha $J \subset \mathbb{Z}$ is intervallum, és $I \subset J$, akkor $\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{A}(J)$;

(iii) (lokalitás) ha $I \cap J$ üres, akkor $\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{A}(J)'$, ahol $\mathcal{A}(J)'$ az $\mathcal{A}(J)$ részalgebra kommutánsa, az a halmaz, amelynek minden eleme $\mathcal{A}(J)$-vel kommutál (néha előfordul, hogy $I \cap J = \emptyset$-n túl azt is meg kell követelnünk, hogy I és J bizonyos távolságnál messzebb legyenek egymástól);

(iv) (transzláció kovariancia) egy $x \in \mathbb{Z}$ elemhez létezik az $\mathcal{A}$ algebrának egy α_x automorfizmusa úgy, hogy $\alpha_x \langle \mathcal{A}(I) \rangle = \mathcal{A}(I + x)$ és $\alpha_x|_{\mathcal{A}(I)}$ bijekció;

(v) $\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{A}(I')'$, ahol $I' \subset \mathbb{Z} \setminus I$ azon pontok halmaza, amely I-től egy adott távolságnál messzebb van (ez már nem egy intervallum), és $\mathcal{A}(I')'$ ismét $\mathcal{A}(I')$ kommutánsát jelöli. Mi a továbbiakban meg fogjuk követelni az algebrai Haag-dualitást is, vagyis az előbbi tartalmazás helyett az egyenlőség teljesülését.

Ha $\mathcal{A}$ a megfigyelhető algebra, $\mathcal{H}_0$ Hilbert-tér, $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_0)$ pedig annak korlátos operátorait jelöli, akkor egy $\pi_0 : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_0)$ $*$-ábrázolással jelöljük ki a rendszer *vákuum-ábrázolását*. Legyen $\mathcal{H}$ egy másik Hilbert-tér, azon egy másik $\pi : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ $*$-ábrázolás. Ezt akkor nevezzük π_0-*hoz képest lokalizáltnak*, ha valamilyen $I \subset \mathbb{Z}$ intervallumra $\pi|_{\mathcal{A}(I')}$ és $\pi_0|_{\mathcal{A}(I')}$ ekvivalensek (létezik egy $U_I : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$ izometria, melyre $a \in \mathcal{A}(I')$ esetén $\pi(a)U_I = U_I \pi_0(a)$). Ez tehát azt jelenti, hogy az I térrészen kívül mérést végezve nem dönthető el, hogy az algebrát π vagy π_0 segítségével ábrázoltuk-e. A vákuum-ábrázolás határozza meg tulajdonképpen "az elmélet fizikáját", pl. a csatolási állandókat (pontosabban az azokat tartalmazó dimenziótlan kombinációk számértékét). Az ehhez képest lokalizált π ábrázolások írhatnak le pl. egy részecskés állapotokat. Ekkor a lokalizáltság szemléletesen azt jelenti, hogy a részecskétől elég távol (I-n kívül) végezve méréseket nem tudjuk eldönteni, hogy valóban jelen van-e a részecske, vagy a részecskementes vákuumban végeztünk mérést, azaz hogy a π_0-hoz képest lokalizált valamilyen π ábrázolásban vagyunk-e, vagy π_0-ban. Az ilyen π ábrázolásokat Doplicher, Haag és Roberts után a π_0 DHR-ábrázolásainak nevezzük.

4.2.1 **Tétel.** Legyen π_0 vákuum-ábrázolás, melyre teljesül a *Haag-dualitás*: minden I intervallumra $\pi_0\langle\mathcal{A}(I)\rangle = \big(\pi_0\langle\mathcal{A}(I')\rangle\big)'$. Ennek minden π DHR-ábrázolásához létezik olyan $\varrho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ endomorfizmus, hogy $\pi_0 \circ \varrho \simeq \pi$, és ϱ *lokalizált*: létezik olyan I intervallum, hogy $\varrho|_{\mathcal{A}(I')} = \mathbf{1}_{\mathcal{A}(I')}$; minden $J \subset I$ intervallumra $\varrho\langle\mathcal{A}(J)\rangle \subset \mathcal{A}(J)$. ■

Ez tehát azt jelenti, hogy a különböző π ábrázolások helyett általában elegendő az $\mathcal{A}$ algebra $\mathrm{End}_{\mathrm{loc}}\mathcal{A}$ lokalizált endomorfizmusait vizsgálnunk.

4.2.2 **Definíció.** Az $\mathcal{A}$ $*$-algebra $\mathrm{End}\mathcal{A}$ *endomorfizmus kategóriájának*

- *objektumai* $\varrho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ $*$-homomorfizmusok;
- *nyilai* vagy *intertwinerei* endomorfizmusok között átvivő $\mathcal{A}$-beli T elemek: $T : \varrho_1 \to \varrho_2\,;\, T\varrho_1(a) = \varrho_2(a)T$ $(a \in \mathcal{A})$.

Ebből következnek a *kategória axiómák*:

- ha $T_1 : \varrho_1 \to \varrho_2$ és $T_2 : \varrho_2 \to \varrho_3$, akkor ezek *kompozíciója* $T_2 \circ T_1 := T_2 T_1 \in \mathcal{A}$ is intertwiner ϱ_1 és ϱ_3 között;
- minden ϱ endomorfizmusra $\mathbf{1}_\varrho := \mathbf{1} \in \mathcal{A}$ az *egységnyíl*;
- ha $T : \varrho_1 \to \varrho_2$ nyíl, akkor az algebra involúciójával $T^* : \varrho_2 \to \varrho_1$ nyíl.

4.2.3 **Definíció.** Ha $\mathcal{A}$ megfigyelhető algebra, akkor az $\mathrm{End}_{\mathrm{loc}}\mathcal{A}$ *lokális endomorfizmusok kategóriája* $\mathrm{End}\mathcal{A}$-ból azokat az objektumokat tartalmazza, melyekhez van olyan I intervallum, hogy I'-n az objektumok identitásként hatnak, nyilai pedig az objektumai között ható nyilak $\mathrm{End}\mathcal{A}$ nyilai közül.
Egy rögzített I intervallumhoz legyen

$$\mathrm{End}_I\mathcal{A} := \left\{\varrho \in \mathrm{End}_{\mathrm{loc}}\mathcal{A} \;\middle|\; \varrho|_{\mathcal{A}(I')} = \mathbf{1}_{\mathcal{A}(I')}\right\} \quad .$$

4.2.4 **Állítás.** Ha ϱ_1 és $\varrho_2 \in \mathrm{End}_I\mathcal{A}$, akkor egy köztük ható $T : \varrho_1 \to \varrho_2$ nyíl eleme $\mathcal{A}(I)$-nek.
Bizonyítás. $a \in \mathcal{A}(I')$ esetén ϱ_1 és ϱ_2 is identitásként hat a-n, ezért a nyilak definíciója alapján $T\,a = a\,T$. Ezért $T \in \mathcal{A}(I')'$, ami az algebrai Haag-dualitás miatt $T \in \mathcal{A}(I)$ teljesülését jelenti. ■

4.2.5 **Definíció.** Az endomorfizmus kategóriában az objektumok és nyilak tenzorszorzata jól definiálható. Ha ϱ_1 és ϱ_2 objektumok, akkor $\varrho_1 \otimes \varrho_2 := \varrho_1 \circ \varrho_2$, amit néha csak $\varrho_1\,\varrho_2$-el fogunk jelölni. Ha $T_1 : \varrho_1 \to \sigma_1$ és $T_2 : \varrho_2 \to \sigma_2$ intertwinerek, akkor $T_1 \otimes T_2 := T_1\varrho_1(T_2) \in \mathcal{A}$.

4.2.6 **Állítás.** Az előbb definiált $T_1 \otimes T_2$ szorzat $\varrho_1 \otimes \varrho_2 \to \sigma_1 \otimes \sigma_2$ intertwiner.
Bizonyítás. $a \in \mathcal{A}$ esetén

$$\begin{aligned}(T_1 \otimes T_2)\,(\varrho_1 \otimes \varrho_2)(a) &= \big(T_1\varrho_1(T_2)\big)\,\varrho_1\big(\varrho_2(a)\big) = T_1\varrho_1\big(T_2\varrho_2(a)\big) = T_1\varrho_1\big(\sigma_2(a)T_2\big) = \\ &= T_1\varrho_1\big(\sigma_2(a)\big)\,\varrho_1(T_2) = \sigma_1\big(\sigma_2(a)\big)\,T_1\varrho_1(T_2) = (\sigma_1 \otimes \sigma_2)(a)\,(T_1 \otimes T_2) \quad . \quad ■\end{aligned}$$

4.2.7 **Állítás.** A nyilak tenzorszorzása asszociatív, és az $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ intertwiner a tenzorszorzás egysége: $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes T = T \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{A}} = T$.
Bizonyítás. Ha $T_\alpha : \varrho_\alpha \to \sigma_\alpha$ intertwinerek $(\alpha = 1, 2, 3)$, akkor

$$(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 = \big(T_1\varrho_1(T_2)\big)\,\varrho_1\big(\varrho_2(T_3)\big) = T_1\varrho_1\big(T_2\varrho_2(T_3)\big) = T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) \quad .$$

Az $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ intertwiner azaz az $\mathbf{1}$ egységoperátor bármilyen objektumnak egységnyila, így az $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$-nak is. Ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes T_1 &= \mathbf{1}_{\mathcal{A}}\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(T_1) = T_1 \quad \text{és} \\ T_1 \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{A}} &= T_1\varrho(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = T_1\,\mathbf{1}_{\mathcal{A}} = T_1 \quad .\end{aligned} \qquad ■$$

5. Az Ising-spin modell

Az Ising-spin modell a fizikában gyakran előforduló jelenségek leírására alkalmas. Szépen illusztrálja ezenkívül a megfigyelhető algebráról és az invariáns részalgebráról alkotott fogalmainkat.

A modellben a teret (egyelőre) az $[1, N] \subset \mathbb{Z}$ intervallum modellezi ($2 \leq N \in \mathbb{N}$). Minden $i \in [1, N]$ indexre a modell $\mathcal{B}$ $*$-algebrájának generátorai U_i és V_i, a következő szabályokkal ($i, j \in [1, N]$):

(i) $U_i^2 = V_i^2 = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$;
(ii) $U_i\, U_j = U_j\, U_i$; $V_i\, V_j = V_j\, V_i$;
(iii) $U_i\, V_j = (-1)^{\delta_{ij}}\, V_j\, U_i$;
(iv) $U_i^* = U_i$; $V_i^* = V_i$.

A modellben a $\mathcal{G} = Z_2 = \{e, z\}$ csoport γ hatása a generátorokon mindegyik i indexre $\gamma_e = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$, $\gamma_z(U_i) = -U_i$, $\gamma_z(V_i) = V_i$. A γ_z hatás felírható Ad_u alakban az $u := \prod_{i=1..N} V_i$ elem segítségével, ezért ez egy belső automorfizmus, a csoporthatás tehát nem külső (4.1.8).

Azonban változtassunk most egy kicsit a $\mathcal{B}$ algebrán, és a továbbiakban is ezt az új algebrát használjuk. Legyenek az i indexek $[1, N]$ helyett $\mathbb{Z}$-ben, és álljon az algebra az előbbi U, V generátorokból felépíthető véges polinomokból. (Ez a $*$-algebra Hilbert-tér operátoraiként hűen ábrázolható, és ennek segítségével normálható, majd teljessé tehető, azaz $\mathbb{C}^*$-algebrává kiterjeszthető.) Ekkor az előbbi u szorzat nem véges, tehát nem lesz eleme az algebrának. Létezhet-e más olyan $u \in \mathcal{B}$ elem, mellyel $\gamma_z = \mathrm{Ad}_u$ alakú? Egy ilyen elem csak véges darab különböző indexű generátort tartalmazhat, ezért mindig található (végtelen sok) olyan $j \in \mathbb{Z}$ index, hogy ilyen indexű generátor nem szerepel u-ban. Az algebra kommutációs tulajdonságai alapján ekkor $\mathrm{Ad}_u(U_j) = u\, U_j\, u^* = u\, u^*\, U_j = U_j \neq -U_j = \gamma_z(U_j)$, tehát γ_z nem lehet belső. Ezen az új algebrán tehát a γ csoporthatás külső lett. (Ha $\mathcal{B}$-t $\mathbb{C}^*$-algebrává kiterjesztve megengednénk végtelen polinomokat is, az $n \mapsto w_n := V_{-n}\, V_{-n+1} \ldots V_n$ sorozat akkor sem lenne konvergens $n \to \infty$ esetében, hiszen $m \neq n$ esetén $w_n - w_m$-nek az ábrázolás Hilbert terén a 2 is sajátértéke, tehát a normája legalább 2; a sorozat nem Cauchy-sorozat. A megfelelő u elem tehát ilyen véges elemekkel ekkor sem közelíthető.)

5.1. Az invariáns részalgebra

Az $\mathcal{A}$ Z_2-invariáns részalgebra olyan szorzatokból és azok összegéből áll, melyek páros darab U generátort tartalmaznak (különböző indexekben). Az $U_i^2 = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$ egyszerűsítések a generátorok számának párosságát természetesen nem befolyásolják. Az invariáns algebra generálható az eddigi V_i generátorok és $l \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ esetén a $W_l := U_{l-\frac{1}{2}}\, U_{l+\frac{1}{2}}$ elemek segítségével. $I \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $i, j \in \mathbb{Z} \cap I$ és $l, k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \cap I$ esetén tehát $\mathcal{A}(I)$ a V_i és W_l által generált véges polinomok $\mathbb{C}^*$-algebrája a következő szabályokkal:

(i) $W_l^2 = V_i^2 = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$;
(ii) $W_l\, W_k = W_k\, W_l$; $V_i\, V_j = V_j\, V_i$;
(iii) $W_l\, V_j = (-1)^{\delta_{l,j-\frac{1}{2}} + \delta_{l,j+\frac{1}{2}}}\, V_j\, W_l$;
(iv) $W_l^* = W_l$; $V_i^* = V_i$.

A továbbiakban $a \in I$ esetén X_a-val fogjuk jelölni a V_a generátort amennyiben a egész, illetve a W_a generátort, ha a félegész.

Az így definiált $\mathcal{A}(I)$ egy megfigyelhető algebra; az izotónia nyilvánvalóan teljesül rá, amennyiben az I és J intervallumok közti távolság legalább 1, akkor $\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{A}(J)'$ teljesül, így a lokalitás is fennáll, a transzláció kovarianciát $x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ esetén az $\alpha_x : X_a \mapsto X_{a+x}$ által generált automorfizmus biztosítja, amennyiben I'-t az I intervallumtól legalább 1 távolságra eső pontok halmazának definiáljuk $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-ben, akkor az algebrai Haag-dualitás is teljesül.

Keressünk az $\mathcal{A}$ algebrában egy ponton lokalizált endomorfizmusokat, azaz olyanokat, melyek egy $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-beli pont komplementumához tartozó algebrán identitásként hatnak. Egy ilyen $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$

pontban lokalizált ϱ_a endomorfizmus csak az X_a generátort változtathatja meg: megszorozhatja egy komplex számmal. Azonban az $X_a^2 = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ egyenletre hattatva ϱ_a-t, látható, hogy ez a (nem triviális) szám csak a -1 lehet. A ϱ_a endomorfizmus tehát az X_a generátort a mínusz egyszeresébe viszi át, mely művelet az algebrát definiáló összes relációt invariánsul hagyja.

Legyenek $a > b$ $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-beli elemek, és $I = [a, b]$. Ekkor $\varrho_a, \varrho_b \in \mathrm{End}_I\mathcal{A}$, ezért a 4.2.4 állítás alapján ha van köztük T_{ab} intertwiner, akkor az eleme $\mathcal{A}(I)$-nek. Azonban egy ilyen intertwiner a teljes $\mathcal{A}(\mathbb{Z} \setminus I)$ algebrával kommutál, hiszen ezen az algebrán ϱ_a és ϱ_b is identitásként viselkedik, ezért $T_{ab} \in [a + \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2}]$ is teljesül (ha ilyen T_{ab} intertwiner létezik). Ebből $b = a + \frac{1}{2}$ esetére azonnal következik, hogy ϱ_a és $\varrho_{a+\frac{1}{2}}$ szomszédja között nincs intertwiner, ez a két endomorfizmus nem lehet ekvivalens. Ha azonban $b - a \in \mathbb{Z}$, akkor a $T_{ab} := X_{a+\frac{1}{2}}\, X_{a+\frac{3}{2}} \ldots X_{b-\frac{1}{2}}$ elem $\varrho_a \to \varrho_b$ intertwiner, azaz egész különbségű indexekkel rendelkező endomorfizmusok ekvivalensek. Könnyen belátható, hogy az így definiált ekvivalencia valóban ekvivalencia-reláció az egy pontban lokalizált endomorfizmusok halmazán. Ha b és a különbsége félegész, akkor ϱ_a és $\varrho_{b-\frac{1}{2}}$ ekvivalensek, viszont $\varrho_{b-\frac{1}{2}}$ és ϱ_b nem ekvivalensek, ezért ϱ_a és ϱ_b sem lehetnek ekvivalensek. Azt látjuk tehát, hogy intertwiner pontosan akkor létezik ϱ_a és ϱ_b között, ha $b - a$ egész szám.

Legyenek $J, I \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ véges intervallumok, és definiáljuk a $\varrho_I := \bigotimes\limits_{i\in I} \varrho_i = \prod\limits_{i\in I} \varrho_i$, illetve hasonlóan a ϱ_J endomorfizmust. Ezek tehát az összes I-beli illetve J-beli indexű generátort mínusz eggyel szorozzák. Keressük a $\varrho_I \to \varrho_J$ intertwinereket. Az I és J intervallumok egész és félegész számokat tartalmaznak, melyeket a következőkkel fogunk jelölni:

$$I = \{i_1, \ldots, i_p \in \mathbb{Z}\,;\, l_1, \ldots, l_t \in \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2}\}$$
$$J = \{j_1, \ldots, j_r \in \mathbb{Z}\,;\, k_1, \ldots, k_u \in \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2}\} \quad .$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $r \leq p$ és $u \leq t$. Legyen i_0 egész szám, és l_0 félegész. A

$$T_{IJ} := T_{i_1 j_1} \otimes \ldots \otimes T_{i_p j_p} \otimes T_{l_1 k_1} \otimes \ldots T_{l_t k_t} \otimes T_{i_0 j_{p+1}} \otimes \ldots \otimes T_{i_0 j_r} \otimes T_{l_0 k_{t+1}} \otimes \ldots \otimes T_{l_0 k_u}$$

elem a nyilak tenzorszorzatának definíciója alapján intertwiner lesz $\varrho_I \otimes \varrho_{i_0} \otimes \ldots \otimes \varrho_{i_0} \otimes \varrho_{l_0} \otimes \ldots \otimes \varrho_{l_0}$ és ϱ_J között. Amennyiben $r-p$ és $u-t$ is párosak, akkor ϱ_I mellett páros darab ϱ_{i_0} és páros darab ϱ_{l_0} jelenik meg, melyek páros darab mínusz előjelet adnak minden i_0-beli illetve l_0-beli generátor elé, azaz olyan, mintha ott sem lennének. Ha tehát külön az egészek és külön a félegészek számának különbsége a két intervallumban páros, akkor a fenti T_{IJ} elem $\varrho_I \to \varrho_J$ intertwiner.
Most indirekt módon megmutatjuk, hogy ha az előbbi párossági feltétel nem áll fenn, akkor ϱ_I és ϱ_J inekvivalensek, azaz nincs köztük átvivő intertwiner. Vegyünk el ugyanis ekkor J-ből egy egész vagy egy félegész elemet (vagy mindkettőt) úgy, hogy a kapott J_0 halmaz intervallum legyen, és benne az egész illetve félegész elemek számának különbsége I egészeinek illetve félegészeinek számától páros legyen. Az előzőek szerint ekkor létezik T_{IJ_0}, melyre $A \in \mathcal{A}$ esetén

$$\varrho_{J_0}(A)\, T_{J_0 I} = T_{J_0 I}\, \varrho_I(A)$$

teljesül. Indirekt tegyük fel, hogy létezik a T_{IJ} intertwiner is. Ekkor

$$T_{J_0 I}\, T_{IJ}\, \varrho_J(A) = T_{J_0 I}\, \varrho_I(A)\, T_{IJ} = \varrho_{J_0}(A)\, T_{J_0 I}\, T_{IJ} \quad ,$$

azaz $T_{J_0 I}\, T_{IJ} \,:\, \varrho_J \to \varrho_{J_0}$ intertwiner. Ennek az intertwinernek kommutálnia kell minden $\mathcal{A}(\mathbb{Z}\setminus J)$-beli elemmel, mert itt mindkét endomorfizmus az identitás, de kommutálnia kell minden $\mathcal{A}(J_0)$-beli elemmel is, mert itt a két automorfizmus ugyanúgy hat. Az algebrai Haag-dualitás alapján ez az intertwiner (melynek véges polinomnak kell lennie) tehát olyan generátorokból épülhet fel, melyek indexei $\mathbb{Z} \setminus J$-től és J_0-tól is legalább 1 távolságra esnek, ilyen index azonban nem létezik. Mivel $\varrho_J \neq \varrho_{J_0}$, ez az intertwiner az $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ elem sem lehet, tehát az indirekt feltevésből ellentmondásra jutottunk.

Eddig a $\mathcal{B}$ algebrából kiindulva egy Z_2-invariáns algebraként kaptuk $\mathcal{A}$-t. Ezen egy pontban lokalizált endomorfizmusokat írtunk fel, melyek azonban külső endomorfizmusok, hiszen bármilyen $\mathcal{A}$-beli véges polinom ha antikommutál valamelyik generátorral, akkor legalább még egy másikkal is antikommutálnia kell, viszont ϱ_a csak egyetlen generátor elé ad mínusz egy szorzót. Ezért most keressük azt a kiterjesztett $\mathcal{F}$ algebrát, aminek $\mathcal{A}$ része, és amiben ϱ_a belső automorfizmus. Egész i indexekre U_i elemeket keresünk, melyekre $\varrho_i = \mathrm{Ad}_{U_i}$. Félegész l indexű ϱ_l-hez pedig Z_l elem kell az $\mathcal{F}$ algebrában, amivel $\varrho_l = \mathrm{Ad}_{Z_l}$. Írjuk fel tehát amit az automorfizmusok belső volta és az $\mathcal{A}$ algebra alapján a generátorokról tudunk ($i, j \in \mathbb{Z}$; $l, k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$):

$$U_i\, V_j = (-1)^{\delta_{ij}}\, V_j\, U_i \tag{5.1.1}$$
$$U_i\, W_l = W_l\, U_i \tag{5.1.2}$$
$$Z_l\, V_j = V_j\, Z_l \tag{5.1.3}$$
$$Z_l\, W_k = (-1)^{\delta_{lk}}\, W_k\, Z_l \tag{5.1.4}$$
$$V_i\, W_l = (-1)^{\delta_{i+\frac{1}{2},l}+\delta_{i-\frac{1}{2},l}}\, W_l\, V_i \tag{5.1.5}$$
$$[V_i, V_j] = [W_l, W_k] = 0 \quad . \tag{5.1.6}$$

Tudjuk még, hogy V és W egy négyzetű, önadjungált elemek. Mindezek mellett keressük a legkisebb $\mathcal{F}$ $\mathbb{C}^*$-algebrát, azaz azt az algebrát, amely a V, W, U, Z generátorok között a legtöbb összefüggést tartalmazza. (5.1.1) és (5.1.2) szerint U_i^2, (5.1.3) és (5.1.4) szerint pedig Z_l^2 kommutál a teljes $\mathcal{A}$ algebrával. Feltesszük, hogy a teljes $\mathcal{A}$ algebra kommutánsa $\mathcal{F}$-ben triviális, azaz $\mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{F}}$. Ezért az U, Z elemek négyzete is $\mathbf{1}_{\mathcal{F}}$ számszorosa. A fenti relációk között sehol sem szerepel utalás e generátorok "nagyságára", ezért feltehetjük, hogy $U_i^2 = Z_l^2 = \mathbf{1}_{\mathcal{F}}$. Hasonlóan $U_i^*\, U_i$-vel illetve $Z_l^*\, Z_l$-el is kommutál a teljes $\mathcal{A}$ algebra, így ezek az elemek $\pm\mathbf{1}_{\mathcal{F}}$-vel egyezhetnek. Ez az előjelválasztás a generátorok önadjungáltságát illetve antiönadjungáltságát jelenti. Mi most a felső lehetőséget választjuk, azaz U-t és Z-t önadjungáltnak tesszük fel.
Mindegyik generátor különbözőképpen kommutál, ezért U és Z nem egyezhet meg V-vel vagy W-vel. Azonban két generátor szorzata viselkedhet úgy, mint egy harmadik generátor. Ezeket a lehetőségeket megvizsgálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} U_{l-\frac{1}{2}}\, U_{l+\frac{1}{2}} &= W_l \quad , \\ Z_{i-\frac{1}{2}}\, Z_{i+\frac{1}{2}} &= V_i \quad . \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Ezt elfogadva kapjuk, hogy $[U_i, U_j] = [Z_l, Z_k] = 0$. Ezzel a lépéssel az $\mathcal{A}$ algebrát felépítettük az U és Z generátorok segítségével, sőt mivel az eredeti $\mathcal{B}$ algebra U operátorai megegyeznek a most bevezetett $\mathcal{F}$ algebra U operátoraival, ezért a $\mathcal{B}$ algebra is kifejezhető új generátorainkkal. Ahhoz, hogy ezt a felépítést teljessé tegyük, hiányzik még az U és Z generátorok kommutációs relációja. A kiindulási relációkat tekintve feltehetjük, hogy az $U_i\, Z_l$ elem a $Z_l\, U_i$ elem számszorosa: $U_i\, Z_l = K(i,l)\, Z_l\, U_i$ $\big(K(i,l) \in \mathbb{C}\big)$. Ezt, valamint V és W (5.1.7) alakját (5.1.1)-be és (5.1.4)-be helyettesítve

$$\begin{aligned} K(i, j - \frac{1}{2})\, K(i, j + \frac{1}{2}) &= (-1)^{\delta_{ij}} \quad , \\ K(k + \frac{1}{2}, l)\, K(k - \frac{1}{2}, l) &= (-1)^{\delta_{kl}} \quad , \end{aligned}$$

amiből valamilyen $y \in \mathbb{C}$-re $K(i,l) = y \cdot \mathrm{sgn}(i - l)$. Mivel $U_i^2 = \mathbf{1}_{\mathcal{F}}$, rajta Z_l átkommutál, ezért $y = \pm 1$. A két lehetséges $\mathcal{F}_\pm$ algebra tehát az egységnyi négyzetű, önadjungált U_i és Z_l elemekből áll, melyekre

$$\begin{aligned} U_i\, Z_l &= \pm\mathrm{sgn}(i - l)\, Z_l\, U_i \quad , \\ [U_i, U_j] &= [Z_l, Z_k] = 0 \quad . \end{aligned}$$

Érdemes megjegyezni, hogy az Ad_{U_i} és Ad_{Z_l} endomorfizmusok ugyan belsők lettek az $\mathcal{F}_\pm$ algebrán, azonban nem lokálisak az $\mathcal{F}_\pm$-on, csak annak $\mathcal{A}$ részalgebráján.

A $\mathcal{G}$ illetve $\widetilde{\mathcal{G}}$ két elemű csoportoknak legyen a következő hatásuk $\mathcal{F}_\pm = \langle U, Z\rangle$-n:

$$\widetilde{\gamma}_z \,:\, Z_i \mapsto -Z_i \quad \text{illetve} \quad \gamma_z \,:\, U_i \mapsto -U_i \quad ,$$

a ki nem írt generátorokat pedig hagyják invariánsan. Ekkor az erdeti $\mathcal{B} = \langle U, V\rangle$ algebra, illetve a teljesen hasonló tulajdonságú $\widetilde{\mathcal{B}} = \langle Z, W\rangle$ algebra lesznek az invariáns részalgebrák $\widetilde{\mathcal{G}}$-ra illetve $\mathcal{G}$-re nézve. $\mathcal{B}$-n a $\mathcal{G}$ csoport, $\widetilde{\mathcal{B}}$-n a $\widetilde{\mathcal{G}}$ csoport invariáns algebráját elkészítve $\mathcal{A} = \langle V, W\rangle$-t kapjuk:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}_\pm = \langle U, Z\rangle & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{G}}} & \mathcal{B} = \langle U, V\rangle \\
\mathcal{G}\big\downarrow & & \big\downarrow \mathcal{G} \\
\widetilde{\mathcal{B}} = \langle Z, W\rangle & \xrightarrow[\widetilde{\mathcal{G}}]{} & \mathcal{A} = \langle V, W\rangle
\end{array}$$

5.2. A megfigyelhető algebra lokális szerkezete

Ha J I-nél egy indexszel bővebb intervallum, akkor $\mathcal{A}(I)$ be van ágyazva $\mathcal{A}(J)$-be. Ezen beágyazások mikéntje ábrázolható egy diagramon, melynek egy sorába azonos számosságú intervallumhoz tartozó algebrák tartoznak, és egy ferde vonala az algebra beágyazását jelképezi az eggyel nagyobb indexhalmazú algebrába. Egy ilyen beágyazást ábrázol az ún. *Bratteli-diagram*, a fenti diagram tehát sok Bratteli-diagram összessége. Ilyen beágyazás többféle lehet, ezért a diagram a beágyazást csak egy olyan izomorfia erejéig határozza meg, amely különböző beágyazások képét egymásba viszi. A diagram felírásához mátrixok segítségével hűen ábrázoljuk az $\mathcal{A}(I)$ invariáns algebrát.

5.2.1 **Állítás.** Legyen $I \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ intervallum. Ha I hossza n egész szám, akkor $\mathcal{A}(I)$ hű ábrázolása az $M_{2^n} \oplus M_{2^n}$-beli mátrixok algebrája, míg $\mathrm{Card}(I) = n - \frac{1}{2}$ esetén az M_{2^n} teljes mátrixalgebra.
Bizonyítás. $I = \{i\}$ esetén az algebra $\mathbf{1}$-et és a V_i generátort tartalmazza, az algebra kommutatív. Hogy az egység és V_i megkülönböztethető legyen, az ábrázolás legyen kétdimenziós, de blokkdiagonális. V_i ábrázolásához egy olyan mátrixot kell találnunk, mely önadjungált, és négyzete $(\mathbf{1}_2)$. Ilyen mátrix a

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

$\mathcal{A}_i$ ábrázolási tere tehát az egységmátrixot is figyelembe véve $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.
$\mathcal{A}_{i,i+\frac{1}{2}}$ esetén az algebra nem kommutatív, ábrázolása legalább kétdimenziós. V_i-nek és $W_{i+\frac{1}{2}}$-nek olyan mátrixokat kell megfeleltetnünk, melyek önadjungáltak, négyzetük egy, és egymással antikommutálnak. Ilyenek a Pauli-mátrixok. Legyen

$$V_i \equiv \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad W_{i+\frac{1}{2}} \equiv \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Az $\mathbf{1}_\mathcal{A}$-nak megfelelő egységmátrixszal együtt a generátorok mátrixai illetve szorzatuk kifeszítik a teljes $M_2(\mathbb{C})$ 2×2-es mátrixok terét (amit a továbbiakban csak M_2-nek fogunk nevezni). Az $\mathcal{A}_{i,i+\frac{1}{2}}$ algebra hű ábrázolása tehát M_2.
$\mathcal{A}_{i,i+\frac{1}{2},i+1}$ ábrázolásához nyilván nagyobb mátrixokra lesz szükségünk. Duplázzuk meg az eddigi ábrázolást. Ha egy $A \in \mathcal{A}_{i,i+\frac{1}{2}}$ elem mátrixa M_2-ben (A) volt, akkor új ábrázolásunkban legyen

$$A \equiv \begin{pmatrix} (A) & \\ & (A) \end{pmatrix}$$

4×4-es mátrix. Nyilvánvaló, hogy ezzel a lépéssel nem rontottuk el $\mathcal{A}_{i,i+\frac{1}{2}}$ ábrázolását. Tudjuk viszont, hogy a $V_i\,V_{i+1}$ elem kommutál a teljes $\mathcal{A}_{i,i+\frac{1}{2}}$ algebrával, ezért csak az $(\mathbf{1}_2)$ 2×2-es egységmátrix számszorosainak blokkjaiból állhat. Válasszuk a

$$V_i\,V_{i+1} \equiv \begin{pmatrix} (\mathbf{1}_2) & \\ & -(\mathbf{1}_2) \end{pmatrix}$$

lehetőséget, amit V_i-vel szorozva

$$V_i\,V_i\,V_{i+1} = V_{i+1} \equiv \begin{pmatrix} (\sigma_3) & \\ & (\sigma_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\mathbf{1}_2) & \\ & -(\mathbf{1}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma_3) & \\ & -(\sigma_3) \end{pmatrix} \quad .$$

Ez egy önadjungált mátrix, négyzete az egységmátrix, és megfelelően kommutál az eddigi generátorok mátrixaival. Új ábrázolásunk a 4×4-es $(\mathbf{1}_4)$ egységmátrix segítségével kifeszíti $M_2 \oplus M_2$-t. Az általánosítás előtti utolsó lépésként $\mathcal{A}_{i\ldots i+\frac{3}{2}}$ ábrázolásához olyan 4×4-es mátrixot kell keresnünk $W_{i+\frac{3}{2}}$ szerepébe, mely eddigi generátoraink közül csak V_{i+1} mátrixával antikommutál. Ilyen mátrix a

$$W_{i+\frac{3}{2}} \equiv \begin{pmatrix} & (\mathbf{1}_2) \\ (\mathbf{1}_2) & \end{pmatrix} \quad .$$

Ez is önadjungált mátrix, négyzete egy, és vele együtt $\mathcal{A}_{i\ldots i+\frac{3}{2}}$ ábrázolása már a teljes M_4 teret kifeszíti.

Most indukciós módon folytatjuk az eljárást. Tegyük fel, hogy ($1 \leq n \in \mathbb{N}$-re) $\mathcal{A}_{i\ldots i+n-\frac{1}{2}}$ hű ábrázolása kifeszíti az M_{2^n} teret. $n = 1$-re és $n = 2$-re erről meggyőződtünk. Duplázzuk meg most eddigi ábrázolásunkat: ha $A_{i\ldots i+n-\frac{1}{2}} \in \mathcal{A}_{i\ldots i+n-\frac{1}{2}}$ ábrázolása eddig a $(A_{i\ldots i+n-\frac{1}{2}}) \in M_{2^n}$ mátrix volt, akkor most legyen

$$A_{i\ldots i+n-\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} (A_{i\ldots i+n-\frac{1}{2}}) & \\ & (A_{i\ldots i+n-\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} \quad .$$

Az $\mathcal{A}_{i\ldots i+n}$ algebra ábrázolásához meg kell találnunk az új V_{i+n} generátor mátrixát. Tudjuk, hogy a $V_i\,V_{i+1}\,\ldots\,V_{i+n}$ elem kommutál a teljes $\mathcal{A}_{i\ldots i+n-\frac{1}{2}}$ algebrával, legyen tehát

$$V_i\,V_{i+1}\,\ldots\,V_{i+n} \equiv \begin{pmatrix} (\mathbf{1}_{2^n}) & \\ & -(\mathbf{1}_{2^n}) \end{pmatrix} \quad .$$

Ha eddig $V_i\,V_{i+1}\,\ldots\,V_{i+n-1}$ ábrázolása M_{2^n}-ben $(V_i\,V_{i+1}\,\ldots\,V_{i+n-1})$ volt, akkor ezzel az előbbi egyenlőséget megszorozva kapjuk, hogy

$$V_{i+n} \equiv \begin{pmatrix} (V_i\,V_{i+1}\,\ldots\,V_{i+n-1}) & \\ & -(V_i\,V_{i+1}\,\ldots\,V_{i+n-1}) \end{pmatrix} \quad ,$$

így $\mathcal{A}_{i\ldots i+n}$ ábrázálosa $(\mathbf{1}_{2^{n+1}})$ segítségével kifeszíti $M_{2^n} \oplus M_{2^n}$-t.

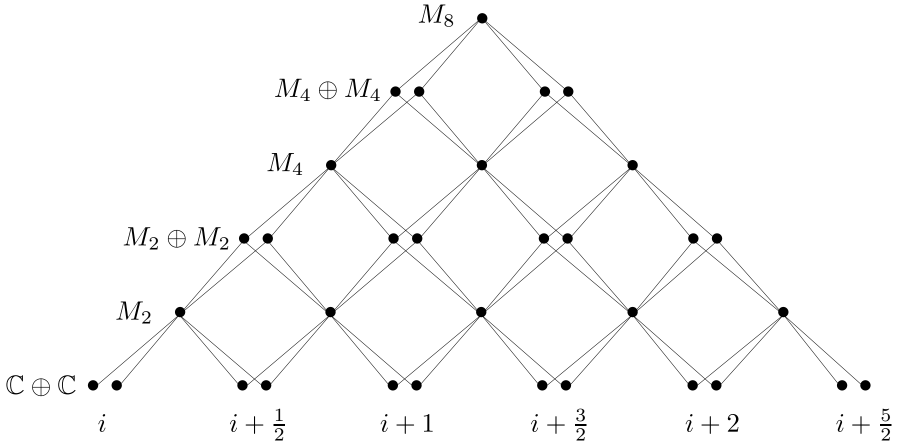
Továbbmenve $\mathcal{A}_{i\ldots i+n+\frac{1}{2}}$ ábrázolásához meg kell keresnünk a $W_{i+n+\frac{1}{2}}$ generátor mátrixát. Ez a generátor az $\mathcal{A}_{i\ldots i+n-\frac{1}{2}}$ algebrával kommutál, csak a V_{i+n} generátorral antikommutál. Ilyen mátrix a

$$W_{i+n+\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} & (\mathbf{1}_{2^n}) \\ (\mathbf{1}_{2^n}) & \end{pmatrix} \quad ,$$

hiszen ha egy $A_{i\ldots i+n} \in \mathcal{A}_{i\ldots i+n}$ elem ábrázolásában a két blokkdiagonális M_{2^n}-beli blokkmátrix egymás ellentettje, az azt jelenti, hogy V_{i+n} szerepel $A_{i\ldots i+n}$-ben szorzóként, és $W_{i+n+\frac{1}{2}}$ pontosan ekkor antikommutál vele. Az $\mathcal{A}_{i\ldots i+n}$-t ábrázoló $M_{2^n} \oplus M_{2^n}$-hez ezt a mátrixot hozzávéve már a teljes $M_{2^{n+1}}$ mátrixteret kapjuk $\mathcal{A}_{i\ldots i+n+\frac{1}{2}}$ ábrázolási tereként. Ezzel eljutottunk a kiindulási feltételünkhöz, de n helyébe most már $n + 1$-et írva.

Az egész eljárás $V \leftrightarrow W$ cserével teljesen hasonlóan működött volna, ha $i \in \mathbb{Z}$ helyett egy $l \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ indexről indítjuk az $\mathcal{A}(I)$ algebrát. Látjuk tehát, hogy ha I hossza $n - \frac{1}{2}$, akkor $\mathcal{A}(I)$ ábrázolási tere M_{2^n}, míg ha I hossza n, akkor $M_{2^n} \oplus M_{2^n}$ lesz a hű ábrázolás tere. ■

Mindezek alapján készíthető el az algebrát ábrázoló diagram (sok Bratteli-diagram összessége):



Ebben a diagramban minden sor megfelel az I intervallum egy számosságának; a legalsó sornak csak egy generátorú algebra felel meg. Bármely pont algebrájában az onnan ferdén lefelé elérhető legalsó pontoknak megfelelő generátorok találhatók meg. Az egyes pontoknak megfelelő algebrát a sor elején látható térben ábrázoltuk. A diagram vonalai ábrázolások egymásba ágyazását jelképezik; egy-egy dupla vonal felel meg egy Bratteli-diagramnak.

6. Egy S_3-spin modell

Ebben a fejezetben az Ising-spin modell valamilyen $I \subset \mathbb{Z}$ véges indextartományon adott $\mathcal{B}(I)$ algebráját fogjuk vizsgálni, azonban az eddigi Z_2-hatás helyett az S_3 csoport hatása alapján. E csoporthatás felírásához a csoport és az algebra U_j, V_j generátorainak kétdimenziós mátrixábrázolásait hívjuk segítségül. Legyen most $i \in I$ esetén

$$U_j \equiv \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad V_j \equiv \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Ezek a mátrixok antikommutálnak egymással, négyzetük az egységmátrix, és szorzatukkal együtt kifeszítik M_2-t, úgy viselkednek tehát, mint az algebra generátorai. Más indexekre felírt generátorok ezekkel kommutálnak, tehát a $\mathcal{B}$ algebra mátrixábrázolása egymástól független M_2 terekből áll minden I-beli indexre. Az S_3 csoport kétdimenziós irreducibilis ábrázolása (1.2.13) szerint ($1 \neq \omega \in \mathbb{C}; \omega^3 = 1$)

$$c \equiv \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad t \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

E csoportgenerátorok mátrixainak adjungált hatását az algebra generátorainak mátrixán felírva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \alpha_c \ &: \ V_j \mapsto \omega^{U_j} V_j \quad ; \quad U_j \mapsto U_j \quad ; \\ \alpha_t \ &: \ V_j \mapsto V_j \quad ; \quad U_j \mapsto -U_j \quad . \end{aligned}$$

($U_j^2 = \mathbf{1}_\mathcal{B}$ miatt $\omega = e^{i\frac{2}{3}\pi}$ esetén $\omega^{U_j} = -\frac{1}{2}\mathbf{1}_\mathcal{B} + i\frac{\sqrt{3}}{2}U_j$.)

6.1. Az invariáns részalgebra

Keressük az erre a hatásra invariáns

$$\mathcal{A}(I) := \left\{ A \in \mathcal{B}(I) | (\forall g \in S_3) \ \ \alpha_g(A) = A \right\}$$

megfigyelhető algebrát. Minthogy α csoporthatás és minden csoportelem felírható c és t szorzataival, elegendő az α_c és α_t algebra-homomorfizmusokra invariáns kifejezéseket megkeresni $\mathcal{A}(I)$ felírásához.

Definiáljuk minden $i \in I$ indexre a következő kifejezéseket:

$$\begin{aligned} \sigma_i^+ &:= V_i \frac{1-U_i}{2} & \sigma_i^- &:= V_i \frac{1+U_i}{2} \quad , \\ P_i^+ &:= \sigma_i^+ \sigma_i^- = \frac{1+U_i}{2} & P_i^- &:= \sigma_i^- \sigma_i^+ = \frac{1-U_i}{2} \quad . \end{aligned}$$

Könnyen belátható, a $\mathcal{B}(I)$ algebra U, V generátorai, így minden eleme is kifejezhető e σ-k segítségével, ezért a továbbiakban $\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{B}(I)$ elemeit is σ-kból felépülő polinomok alakjában tekintjük. Fontosak lesznek a következő egyszerű azonosságok:

$$\begin{gathered} P_i^- \sigma_i^- = \sigma_i^- P_i^+ = \sigma_i^- \sigma_i^+ \sigma_i^- = \sigma_i^- \quad , \qquad P_i^+ \sigma_i^+ = \sigma_i^+ P_i^- = \sigma_i^+ \sigma_i^- \sigma_i^+ = \sigma_i^+ \quad , \\ \sigma_i^- \sigma_i^- = 0 \quad , \qquad \sigma_i^+ \sigma_i^+ = 0 \quad . \end{gathered} \tag{6.1.1}$$

Definiáljuk továbbá (Card$(I) \geqq 2$ illetve 3 esetén) minden $i, j, k \in I$ indexre az

$$\begin{aligned} X_{ij} &:= V_i V_j \frac{1 - U_i U_j}{2} = \sigma_i^+ \sigma_j^- + \sigma_i^- \sigma_j^+ \quad , \\ Y_{ijk} &:= V_i V_j V_k \frac{1 + U_i U_j + U_i U_k + U_j U_k}{4} = \sigma_i^+ \sigma_j^+ \sigma_k^+ + \sigma_i^- \sigma_j^- \sigma_k^- \end{aligned}$$

$\mathcal{B}(I)$ algebra-beli elemeket.

6.1.1 **Állítás.** Az $\mathcal{A}(I)$ algebra minden eleme felírható olyan polinomok alakjában, melyeknek

(i) minden tagjához találhatunk a polinomban egy "ellenkező" tagot is amit úgy kapunk, hogy minden $i \in I$ indexre az adott tagban végrehajtjuk a $\sigma_i^- \leftrightarrow \sigma_i^+$ (és így a $P_i^+ \leftrightarrow P_i^-$) cserét;

(ii) minden tagjában az összes indexre összeadva a σ^+-ok darabszámát, és ebből kivonva a σ^--ok darabszámát hárommal osztható számot kapunk eredményül.

Bizonyítás. Nézzük meg a c, t csoportgenerátorok hatását a σ^+ és a σ^- elemekre ($k \in I, \omega = e^{i\frac{2}{3}\pi}$):

$$\alpha_c(\sigma_k^+) = \alpha_c(V_k)\frac{1-\alpha_c(U_k)}{2} = \omega^{U_k}V_k\frac{1-U_k}{2} = V_k\frac{\omega^{-U_k} - \omega^{-U_k}U_k}{2} =$$
$$= V_k\frac{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}U_k) - (-\frac{1}{2}U_k - i\frac{\sqrt{3}}{2})}{2} = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})V_k\frac{1-U_k}{2} = \omega\sigma_k^+ \quad \text{, és}$$

$$\alpha_c(\sigma_k^-) = \alpha_c(V_k)\frac{1+\alpha_c(U_k)}{2} = \omega^{U_k}V_k\frac{1+U_k}{2} = V_k\frac{\omega^{-U_k} + \omega^{-U_k}U_k}{2} =$$
$$= V_k\frac{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}U_k) + (-\frac{1}{2}U_k - i\frac{\sqrt{3}}{2})}{2} = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})V_k\frac{1+U_k}{2} = \omega^2\sigma_k^- \quad ;$$

$$\alpha_t(\sigma_k^+) = \alpha_t(V_k)\frac{1-\alpha_t(U_k)}{2} = V_k\frac{1+U_k}{2} = \sigma_k^- \quad ,$$
$$\alpha_t(\sigma_k^-) = \alpha_t(V_k)\frac{1+\alpha_t(U_k)}{2} = V_k\frac{1-U_k}{2} = \sigma_k^+ \quad .$$

A σ kifejezésekkel a $\mathcal{B}(I)$ algebra U, V generátorai, így minden eleme is kifejezhető, ezért az $\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{B}(I)$ algebra minden eleme is felírható különböző σ-k polinomjaként. Az (6.1.1) összefüggések segítségével és a különböző indexű σ-k kommutálása miatt elérhető, hogy egy adott $i \in I$ indexre ezen polinomok minden tagja legfeljebb egy darab σ_i^+-t és egy darab σ_i^--t tartalmazzon.

(i) Az α_t homomorfizmus egy tagot éppen annak "ellenkezőjébe" visz át, hiszen minden indexben végrehajtja a $\sigma^+ \leftrightarrow \sigma^-$ cserét. Ezért ha egy polinom erre invariáns, akkor minden tagjához szerepelnie kell a megfelelő "ellenkező" tagnak is.

(ii) Az α_c homomorfizmus pedig minden tagot a polinomban csak egy számmal szoroz, ha a-val jelöljük a tagban található σ^+-ok és b-vel a σ^--ok számát, akkor ez a számszorzó $\omega^{(a+2b)} = \omega^{(a-b)}$ alakú. Ezért az invariáns polinom minden tagjában $\omega^{(a-b)} = 1$, azaz $a - b = 0|_{\mathrm{mod}3}$, tehát a σ^+-ok és σ^--ok számának különbsége hárommal osztható. ■

6.1.2 **Állítás.** A fent definiált X_{ij} és Y_{ijk} alakú kifejezések (i, j, illetve $k \in I$ esetén) elemei az $\mathcal{A}(I)$ megfigyelhető algebrának, és $\mathcal{A}(I)$ minden eleme felírható X_{ij} és Y_{ijk} alakú elemek algebrai kombinációjaként.

Bizonyítás. X_{ij} és Y_{ijk} σ-kkal kifejezett alakjaiból nyilvánvaló, hogy megfelelnek az előző állítás követelményeinek, ezért elemei (I-beli indexek esetén) $\mathcal{A}(I)$-nek.

Az állítás második részét $\mathrm{Card}(I)$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. A csoporthatás a tagok fokszámát nem változtatja, ezért az $\mathcal{A}(I)$-beli invariáns polinomok minden homogén valamilyen fokú polinomja is invariáns; elegendő tehát az ilyen homogén polinomokat előállítanunk X és Y segítségével. Egy homogén polinomon belül (i) értelmében minden taghoz találunk megfelelő "ellenkező" tagot. Egy tag és az "ellenkező" tagja együtt önmagában is invariáns, ezért csak olyan kifejezésekkel kell foglalkoznunk, melyek valahány σ szorzatának és ugyanezen szorzat $\sigma^+ \leftrightarrow \sigma^-$ cserélt változatának összegéből állnak. (ii) alapján egy tagban a σ^+-ok és σ^--ok darabszámának különbsége hárommal osztható, miközben (6.1.1) miatt egy tagban minden $i \in I$-re legfeljebb egy darab σ_i^+ és legfeljebb egy darab σ_i^- található. A továbbiakban az invariáns tag+"ellenkező" tag összeget $P^{(n)}$-el jelöljük, amennyiben a benne szereplő σ-k n db különböző indexet viselnek.

$\mathrm{Card}(I) = 1$ esetén $P^{(1)}$-ben σ_i^+-t (ii) miatt σ_i^--al is szorozni kell, az egyetlen invariáns polinom

$$P^{(1)} = \sigma_i^+\sigma_i^- + \sigma_i^-\sigma_i^+ = P_i^+ + P_i^- = 1 \quad .$$

$\mathrm{Card}(I) = 2$ esetén a mindkét indexet tartalmazó kifejezések:

$$P^{(2)} = \sigma_i^+\sigma_j^- + \sigma_i^-\sigma_j^+ = X_{ij} \quad \text{vagy}$$
$$P^{(2)} = \sigma_i^+\sigma_i^-\sigma_j^-\sigma_j^+ + \sigma_i^-\sigma_i^+\sigma_j^+\sigma_j^- = P_i^+P_j^- + P_i^-P_j^+ = X_{ij}^2 \quad \text{vagy}$$
$$P^{(2)} = \sigma_i^+\sigma_i^-\sigma_j^+\sigma_j^- + \sigma_i^-\sigma_i^+\sigma_j^-\sigma_j^+ = P_i^+P_j^+ + P_i^-P_j^- = 1 - X_{ij}^2 \quad .$$

$\mathrm{Card}(I) = 3$-ra a háromindexes megfelelő különböző alakú homogén polinomok:

$$P^{(3)} = \sigma_i^+\sigma_j^+\sigma_k^+ + \sigma_i^-\sigma_j^-\sigma_k^- = Y_{ijk} \quad \text{vagy}$$
$$P^{(3)} = \sigma_i^-\sigma_i^+\sigma_j^+\sigma_k^- + \sigma_i^+\sigma_i^-\sigma_j^-\sigma_k^+ = P_i^-\sigma_j^+\sigma_k^- + P_i^+\sigma_j^-\sigma_k^+ = X_{ij}^2X_{jk} \quad \text{vagy}$$
$$P^{(3)} = \sigma_i^+\sigma_i^-\sigma_j^+\sigma_j^-\sigma_k^+\sigma_k^- + \sigma_i^-\sigma_i^+\sigma_j^-\sigma_j^+\sigma_k^-\sigma_k^+ = P_i^+P_j^+P_k^+ + P_i^-P_j^-P_k^- = Y_{ijk}^2 \quad \text{vagy}$$
$$P^{(3)} = \sigma_i^+\sigma_i^-\sigma_j^+\sigma_j^-\sigma_k^-\sigma_k^+ + \sigma_i^-\sigma_i^+\sigma_j^-\sigma_j^+\sigma_k^+\sigma_k^- = P_i^+P_j^+P_k^- + P_i^-P_j^-P_k^+ = X_{ik}^2X_{jk}^2 \quad .$$

Most megmutatjuk, hogy ha $\mathcal{A}(I)$-re az állítás igaz, és $n = \mathrm{Card}(I) \geq 3$, akkor az állítás $\mathcal{A}(J)$-re is igaz, ahol $\mathrm{Card}(J) = \mathrm{Card}(I) + 1 = n + 1$ és $I \subset J$. Legyen $i, j \in I, k \in J \setminus I$. Ekkor az $\mathcal{A}(J)$-beli $P^{(n+1)}$-ben a k indexet P_k^+, P_k^- (a.) eset), vagy σ_k^+, σ_k^- (b.) eset) tartalmazhatja.

a.) Az előbbi két esetben (i) miatt

$$P^{(n+1)} = C^{(n)}P_k^+ + \widetilde{C^{(n)}}P_k^-$$

alakban írható, ahol $C^{(n)}$ n darab különböző indexet hordozó σ-szorzat ($n \geq 3$ miatt ez létezik és nem triviális), $\widetilde{C^{(n)}}$ pedig ennek $\sigma^+ \leftrightarrow \sigma^-$ cserélt változata. P_k^+ és P_k^- nem változtatja a σ^+-ok és σ^--ok számának kölönbségét, ezért (ii) miatt a $C^{(n)}$ szorzatban is hárommal osztható lesz a σ^+-ok és σ^--ok számának különbsége. Ezért a

$$P^{(n)} := C^{(n)} + \widetilde{C^{(n)}}$$

összeg eleme lesz $\mathcal{A}(I)$-nek, az indukciós feltevés szerint így az állítás $P^{(n)}$-re igaz. $C^{(n)}$ a j indexet σ_j^-, P_j^+, illetve σ_j^+, P_j^- alakban tartalmazhatja, ezért az első két esetben $P^{(n+1)} = P^{(n)}(P_j^+P_k^+ + P_j^-P_k^-) = P^{(n)}(1 - X_{jk}^2)$, míg a második két lehetőség esetén $P^{(n+1)} = P^{(n)}(P_j^-P_k^+ + P_j^+P_k^-) = P^{(n)}X_{jk}^2$, ezért az állítás $P^{(n+1)}$-re is igaz.

b.) Ekkor (i) miatt

$$P^{(n+1)} = C^{(n)}\sigma_k^+ + \widetilde{C^{(n)}}\sigma_k^-$$

alakú. Négy aleset lehetséges:

b/1.) aleset: valamelyik $j \in I$ indexre $C^{(n)} = C^{(n-1)}P_j^+$ alakban írható, ahol $C^{(n-1)}$-ben az összes I-beli index szerepel j kivételével. ($n \geq 3$ miatt ez létezik és nem triviális.) Ekkor tehát

$$P^{(n+1)} = C^{(n-1)}P_j^+\sigma_k^+ + \widetilde{C^{(n-1)}}P_j^-\sigma_k^- \quad .$$

A

$$C^{(n-1)}\sigma_j^+ + \widetilde{C^{(n-1)}}\sigma_j^- \tag{6.1.2}$$

kifejezés olyan, hogy nyilvánvalóan tudja az (i) tulajdonságot; első tagjában a σ^+-ok és σ^--ok számának különbsége pedig ugyanannyi, mint $P^{(n+1)}$ első tagjában, így $P^{(n+1)} \in \mathcal{A}(J)$ miatt erre a kifejezésre az (ii) tulajdonság is igaz. A (6.1.2) kifejezés tehát $\mathcal{A}(I)$-nek eleme, ezért az indukciós feltevés értelmében X és Y alakú elemek algebrai kombinációja, és $X_{jk} = \sigma_j^- \sigma_k^+ + \sigma_j^+ \sigma_k^-$-al jobbról szorozva épp $P^{(n+1)}$-et kapjuk.

b/2.) aleset: valamelyik $j \in I$ indexre $C^{(n)} = C^{(n-1)} P_j^-$ alakban írható, ahol $C^{(n-1)}$-ben ismét az összes I-beli index szerepel j kivételével. Ekkor

$$P^{(n+1)} = C^{(n-1)} P_j^- \sigma_k^+ + \widetilde{C^{(n-1)}} P_j^+ \sigma_k^- \quad .$$

Most az előbbi (6.1.2) kifejezést $X_{jk} = \sigma_j^- \sigma_k^+ + \sigma_j^+ \sigma_k^-$-al balról szorozva kapjuk $P^{(n+1)}$-et, tehát az állítás $P^{(n+1)}$-re ismét igaz.

b/3.) aleset: valamelyik $j \in I$ indexre $C^{(n)} = C^{(n-1)} \sigma_j^-$ alakban írható, ahol $C^{(n-1)}$-ben ismét az összes I-beli index megtalálható j kivételével. Most

$$P^{(n+1)} = C^{(n-1)} \sigma_j^- \sigma_k^+ + \widetilde{C^{(n-1)}} \sigma_j^+ \sigma_k^- \quad .$$

A

$$C^{(n-1)} + \widetilde{C^{(n-1)}} \tag{6.1.3}$$

kifejezés nyilvánvalóan tudja az (i) tulajdonságot, és első tagjában a σ^+-ok és σ^+-ok különbsége ugyanannyi, mint $P^{(n+1)}$ első tagjában. Ezért (6.1.3) az (ii) tulajdonságot is kielégíti, vagyis (6.1.3)$\in \mathcal{A}(I \setminus \{j\})$, rá az indukciós feltevés vonatkozik. $n \geq 3$ miatt (6.1.3) nem triviális (hiszen például $n = 2$-re csak az egységelem lehetne), ezért nézhetjük az $i \in I \setminus \{j\}$ indexű szorzótagot $C^{(n-1)}$-ben. Amennyiben ez a tag σ_i^- vagy P_i^+, úgy $X_{ij}^2 X_{jk} = P_i^+ \sigma_j^- \sigma_k^+ + P_i^- \sigma_j^+ \sigma_k^-$-al, ha pedig ez a tag σ_i^+ vagy P_i^-, úgy $X_{jk} X_{ij}^2 = P_i^- \sigma_j^- \sigma_k^+ + P_i^+ \sigma_j^+ \sigma_k^-$-al szorozva kapjuk $P^{(n+1)}$-et.

b/4.) aleset: $C^{(n)}$-re az eddigi b/1.), b/2.), b/3.) esetek közül egyik sem alkalmazható, azaz $C^{(n)}$ csupa σ^+-t tartalmaz. Ilyenkor $n - 2 \geq 1$ hárommal osztható, és

$$P^{(n+1)} = \sigma_{a_1}^+ \dots \sigma_{a_{n-2}}^+ \sigma_i^+ \sigma_j^+ \sigma_k^+ + \sigma_{a_1}^- \dots \sigma_{a_{n-2}}^- \sigma_i^- \sigma_j^- \sigma_k^- \quad ,$$

ahol $a_1, \dots a_{n-2}, i, j$ különböző indexek I-ben és $k \in J \setminus I$. $P^{(n+1)}$ mindkét tagjából az utolsó három σ-t elvéve a σ^+-ok illetve σ^--ok száma modulo 3 nem változik, ezért a

$$\sigma_{a_1}^+ \dots \sigma_{a_{n-2}}^+ + \sigma_{a_1}^- \dots \sigma_{a_{n-2}}^-$$

kifejezés eleme $\mathcal{A}(I \setminus \{i, j\})$-nek, rá az indukciós feltevés szerint az állítás igaz. A kifejezést $Y_{ijk} = \sigma_i^+ \sigma_j^+ \sigma_k^+ + \sigma_i^- \sigma_j^- \sigma_k^-$-al szorozva

$$P^{(n+1)} + \sigma_{a_1}^- \dots \sigma_{a_{n-2}}^- \sigma_i^+ \sigma_j^+ \sigma_k^+ + \sigma_{a_1}^+ \dots \sigma_{a_{n-2}}^+ \sigma_i^- \sigma_j^- \sigma_k^-$$

-t kapjuk. Az utolsó két tag összege a b/3.) alesetbe tartozik (az ott szereplő $C^{(n-1)}$ helyébe most $\sigma_{a_1}^- \dots \sigma_{a_{n-3}}^- \sigma_i^+ \sigma_j^+$ kerül; $n \geq 3$ és $n - 2$ hárommal oszthatósága miatt $n \geq 5$, tehát ez létezik), róla tehát korábban láttuk, hogy az állítás rá igaz. $P^{(n+1)}$-et tehát ismét megkaptuk X és Y alakú elemek algebrai kombinációjával. ■

A $\mathcal{B}$ algebra generátorai ábrázolhatók egy Hilbert-téren ható operátorokként. $U_i^2 = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$ miatt az U_i-t hűen ábrázoló operátor sajátértéke ± 1. A két sajátvektor legyen $|\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\rangle$, melyeket a fizikában spinállásoknak feleltetnek meg. Ha $|a\rangle$ U_i sajátvektora valamilyen sajátértékkel, akkor az antikommutációs szabály miatt $V_i |a\rangle$ sajátvektor ellentett sajátértékkel. Ezért $V_i |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$ és $V_i |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$. Mindezek alapján követhető $\sigma_i^\pm$ hatása ezeken az állapotokon. σ_i^+ csak a $|\downarrow\rangle$ vektoron lesz nem nulla, és belőle $|\uparrow\rangle$-t csinál, σ_i^- pedig épp fordítva dolgozik. X_{ij} több indexű elem; mivel a $\mathcal{B}$ algebrában a különböző indexekhez tartozó generátorok egymástól függetlenek, ezért minden indexre megismételhető a fenti ábrázolás, vagyis a kétindexes X_{ij} operátor a két nyíllal jellemezhető állapotokon hathat. Mivel ez az operátor a két indexében ellenkező $\sigma^{\pm}$-t tartalmaz, hatása csak a $|\uparrow\downarrow\rangle$ és a $|\downarrow\uparrow\rangle$ vektorokon lesz nullától különböző, ezeket a vektorokat megcseréli. Hasonlóan Y_{ijk} a $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$ vektort cseréli fel egymással, és más hármas elrendezést a nullába visz át. Az X_{ij}^2 egy egyszerű projektor, az ellentétes állású spinpárok alterére vetít, $\mathbf{1}_{\mathcal{B}} - X_{ij}^2$ az azonos állású spinállapotokra projektál.

Mindezek alapján elkészíthetünk az $\mathcal{A}_{ijk}$ három pont-algebrában az X elemek segítségével egy mátrixegység ábrázolást. Legyen ugyanis

$$|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

ekkor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv X_{ij}^2(\mathbf{1}_{\mathcal{B}} - X_{jk}^2) \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv X_{ij}^2 X_{jk}^2 \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv X_{jk}^2(\mathbf{1}_{\mathcal{B}} - X_{ij}^2) \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv X_{ij} X_{jk}^2 \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv X_{ij} X_{jk} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv X_{jk}^2 X_{ij} \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv X_{ij}^2 X_{jk} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv X_{jk} X_{ij} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv X_{jk} X_{ij}^2 \quad .$$

Könnyen ellenőrizhetők a következő tulajdonságok:

$$\begin{gathered} X_{ij} X_{jk} X_{ij} = X_{jk} X_{ij} X_{jk} = 0 \ ; \\ [X_{ij}^2, X_{jk}^2] = 0 \ ; \\ X_{ij} = \{X_{ij}, X_{jk}^2\} \ ; \\ X_{ij}^3 = X_{ij} \ . \end{gathered}$$

Kérdés, hogy ezek a relációk minden információt tartalmaznak-e az X $\mathcal{A}$-generátorok egymás közötti viselkedéséről. A fenti mátrixegység ábrázolás mátrixainak szorzási szabályát megkaphatjuk a mátrixokhoz tartozó kifejezések szorzásaiból. Ezek elvégzéséhez pedig elegendőek az előbb felsorolt relációk. Eszerint tehát az algebra X elemeinek viselkedését (a hű ábrázolásukat alkotó operátorok sajátvektorain) meghatározzák a fenti relációk. Az algebra felírásakor lehetőleg szomszédos i, j, k indexekkel dolgozunk, ezért kevésbé jelentős a következő reláció, mellyel nem szomszédos indexekre térhetünk át:

$$X_{ik} = \{X_{ij}, X_{jk}\} \ .$$

További néhány relációval leírhatjuk az Y elemek viselkedését is:

$$\begin{gathered} Y_{ijk}^3 = Y_{ijk} \ ; \\ Y_{ijk} X_{ij} = 0 \ ; \\ \{Y_{ijk}, X_{kl}\} = Y_{ijl} \ ; \\ \{Y_{ijk}, X_{kl}^2\} = Y_{ijk} \ ; \\ [Y_{ijk}, Y_{ijl}] = [X_{jk}, X_{jl}] + [X_{ik}, X_{il}] \ , \end{gathered}$$

6.2. Az invariáns algebra amplimorfizmusai

Keressünk az $\mathcal{A}$ invariáns algebrában olyan ϱ lokális endomorfizmust, amely kiterjed $\mathcal{B}$ egy $\widetilde{\varrho}$ lokális endomorfizmusává is.

6.2.1 **Lemma.** Legyen $I \subset \mathbb{Z}$ véges intervallum, $\mathcal{A}$ pedig a teljes invariáns algebra. Ekkor $\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}(I) = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$.

Bizonyítás. Az S_3 csoport hatása belső hatás $\mathcal{B}(I)$-n, melyet indukáló $\prod_{i\in I} \omega^{-U_i}$ illetve $\prod_{i\in I} V_i$ elemek generálják az $S_3(I)$ algebrát. Ez az algebra minden indexben ugyanolyan elemeket tartalmaz. A $\mathcal{B}(I)$ teljes M_2 mátrixalgebrák tenzorszorzatában $S_3(I)'' \cap \mathcal{B}(I) = S_3(I)$ teljesül [GHJ], és a csoport adjungált hatása miatt $S_3(I)' \cap \mathcal{B}(I)$ épp az invariáns $\mathcal{A}(I)$ algebra. Ezért $\mathcal{A}(I)' \cap \mathcal{B}(I) = S_3(I)$. Ekkor $\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{A}$ miatt $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}(I)'$, így $\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}(I) \subset \mathcal{A}(I)' \cap \mathcal{B}(I) = S_3(I)$. $\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}(I)$ tehát $S_3(I)$-nek az a része, amelyik kommutál $\mathcal{A}$-val. Nyilvánvaló, hogy az $\mathcal{A}(I)$-vel való kommutálás nem ad megszorítást a keresett algebrára; azok az $\mathcal{A}$-beli elemek lesznek érdekesek, melyek egyik indexe található csak I-ben. Legyen $j \in I$ index úgy, hogy $j+1$ már nem esik I-be. Ekkor $X_{j,j+1} \in \mathcal{A}$, tehát egy $\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}(I)$-beli elem vele kommutál. Nyilvánvalóan $S_3(I)$ j-nél kisebb indexű részével $X_{j,j+1}$ kommutálni fog. A $c_j \equiv \omega^{-U_j}$ és $t_j \equiv V_j$ csoportgenerátorokkal elvégezve a kommutációt, azt kapjuk, hogy $c_j + c_j^2$ illetve $t_j + t_j c_j + t_j c_j^2$ a kommutáló kombinációk. Az első kombináció $-\mathbf{1}_{\mathcal{B}_j}$, a második pedig nulla. Ha egy $S_3(I)$-beli elem tehát kommutál $X_{j,j+1}$-el, akkor ez az elem olyan kombinációjú, hogy nem tartalmazza a j indexet (azaz kommutál $\mathcal{B}_j$-vel). Ne felejtsük el, hogy $S_3(I)$ egy eleme minden indexében ugyanolyan alakú kifejezések szorzatából áll. Ez azt jelenti, hogy ha a fentiek szerint $X_{j,j+1}$-el kommutáló elem a j indexet nem tartalmazza, akkor semelyik $i \in I$ indexet sem tartalmazza, azaz kommutál $\mathcal{B}(I)$-vel. $\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}(I)$ tehát olyan elemekből áll, melyek $\mathcal{B}(I)$-ben és $\mathcal{B}(I)'$-ben is benne vannak, ezek pedig csak az egység számszorosai lehetnek. ∎

6.2.2 **Állítás.** Csak egy nem triviális lokális endomorfizmusa létezik az $\mathcal{A}$ algebrának úgy, hogy az $\mathcal{B}$-re kiterjesztve is lokális endomorfizmus maradjon, és ez a következő: $\varrho : V_i \mapsto -V_i$ és $U_i \mapsto U_i$, vagyis $Y_{ijk} \mapsto -Y_{ijk}$; $X_{ij} \mapsto X_{ij}$.

Bizonyítás. A kiterjesztett $\widetilde{\varrho}$ endomorfizmus a teljes mátrixalgebrák tenzorszorzatából álló $\mathcal{B}(I)$-n a Skolem-Noether tétel (4.1.11) alapján belső: létezik $B \in \mathcal{B}$, hogy $\widetilde{\varrho}(x) = B\,x\,B^{-1}$ $\forall x \in \mathcal{B}$ esetén. Amennyiben $\varrho = \widetilde{\varrho}|_{\mathcal{A}}$ az $\mathcal{A}$-nak automorfizmusa, úgy $x \in \mathcal{A}$ esetén $B\,x\,B^{-1} \in \mathcal{A}$, ezért a $g \in S_3$ csoportelemet hattatva

$$B\,x\,B^{-1} = \alpha_g(B\,x\,B^{-1}) = \alpha_g(B)\,x\,\alpha_g(B^{-1}) = \alpha_g(B)\,x\,\alpha_g(B)^{-1} \quad ,$$

azaz $[x, B^{-1}\alpha_g(B)] = 0$ minden $x \in \mathcal{A}$-re. Mivel $\widetilde{\varrho}$ lokalizált, van olyan I intervallum, hogy $B \in \mathcal{B}(I)$. Ezért $B^{-1}\alpha_g(B) \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{B}(I)$. Az előző lemma alapján van olyan $c_g \in \mathbb{C}$ szám, hogy $B^{-1}\alpha_g(B) = c_g \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$. A $g \mapsto c_g$ leképzés a csoport egy egydimenziós ábrázolása. A triviális (V_0) ábrázolás a mi szempontunkból érdektelen. A másik lehetőség a V_1 ábrázolás, ekkor a B elem épp az U generátorok szorzatával egyezik meg az I intervallumon, és $\widetilde{\varrho}$ éppen az állításban szereplő csoporthatás. ∎

Ha endomorfizmusokat nem találtunk a megfigyelhető algebrában, célszerű egy tágabb lehetőségeket tartalmazó konstrukciót, *amplimorfizmust* keresni.

6.2.3 **Definíció.** A $\mathcal{B}$ algebra *amplifikáltjának* nevezzük az $M_n(\mathcal{B})$ n-szer n-es mátrixok terét, melyek mátrixelemei nem számok, hanem $\mathcal{B}$ elemei. $M_n(\mathcal{B})$ egy egységelemes $*$-algebra, melyen a szorzást az M_n-beli mátrixok szorzásaként értelmezzük, mátrixelemenként a $\mathcal{B}$ algebra szorzását végezve. $M_n(\mathcal{B})$-t $\mathcal{B} \otimes M_n(\mathbb{C})$-vel is jelöljük. $\mathcal{B}$ *amplimorfizmusainak* nevezzük a $\mathcal{B} \to M_n(\mathcal{B})$ $*$-homomorfizmusokat. Egy $\mu : \mathcal{B} \to M_m(\mathcal{B})$ amplimorfizmus *belső*, ha valamilyen n-re létezik olyan F m-szer n-es amplifikált elem $M_{mn}(\mathcal{B})$-ben, hogy minden $x \in \mathcal{B}$ elemre $\mu(x) = F\,(x \otimes \mathbf{1}_n)\,F^*$ teljesül, és $F^*\,F = \mathbf{1}_n$. ($n < m$ esetén ilyenkor általában $F\,F^* = \mu(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}) \neq \mathbf{1}_m$, az amplimorfizmus tehát nem egységőrző.)

Nyilvánvaló, hogy $M_n(\mathcal{B})$ "tágabb" $\mathcal{B}$-nél, hiszen azt $\mathcal{B}\otimes\mathbf{1}_n$ formában tartalmazza.

Az előző állítás bizonyításához hasonló gondolatmenet segítségével fontos tulajdonságokat tudhatunk meg a $\mathcal{A}$ algebra olyan μ amplimorfizmusairól, melyek kiterjeszthetők a $\mathcal{B}$ algebra $\widetilde{\mu}$ lokális amplimorfizmusaivá. Az amplifikálás után továbbra is igaz lesz, hogy $M_n\big(\mathcal{B}(I)\big)$ minden amplimorfizmusa belső.

6.2.4 **Állítás.** A fentiek szerinti $\widetilde{\mu} : \mathcal{B}\to M_m(\mathcal{B})\,;\, x\mapsto F\,(x\otimes\mathbf{1}_n)\,F^*$ amplimorfizmust generáló $F\in M_{mn}(\mathcal{B})$ elem minden sora a mátrixelemenként külön ható α_g S_3 csoporthatásra nézve egy D-multiplett, azaz $\alpha_g(F)=F\,(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}\otimes D_g)$, ahol $D_g\in M_n$ a g csoportelem mátrixábrázolása.

Bizonyítás. $x\in\mathcal{A}$ esetén $\widetilde{\mu}(x)\in M_m(\mathcal{A})$ teljesülését követeljük meg, ezért az amplifikált tereken

$$F\,(x\otimes\mathbf{1}_n)\,F^*=\alpha_g\big(F\,(x\otimes\mathbf{1}_n)\,F^*\big)=\alpha_g(F)\,(x\otimes\mathbf{1}_n)\,\alpha_g(F^*)\quad .$$

Ezt balról F^*-al, jobbról $\alpha_g(F)$-el szorozva, és felhasználva, hogy $F^*\,F=\mathbf{1}_n$ valamint a $\mathcal{B}$-n ható S_3 hatás automorfizmus voltát

$$\begin{gathered}F^*F\,(x\otimes\mathbf{1}_n)\,F^*\,\alpha_g(F)=F^*\,\alpha_g(F)\,(x\otimes\mathbf{1}_n)\,\alpha_g(F^*)\,\alpha_g(F)\quad ;\\ \big[(x\otimes\mathbf{1}_n)\,,\ F^*\,\alpha_g(F)\big]=0\quad .\end{gathered}$$

A (6.2.1) lemma szerint ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}F^*\,\alpha_g(F)\in\big(\mathcal{B}(I)\otimes M_n\big)\cap\big(\mathcal{A}(I)\otimes\mathbf{1}_n\big)'&=\big(\mathcal{B}(I)\otimes M_n\big)\cap\big(\mathcal{A}(I)'\otimes M_n\big)=\\ &=\big(\mathcal{B}(I)\cap\mathcal{A}(I)'\big)\otimes M_n=\mathbf{1}_{\mathcal{B}}\otimes M_n\quad .\end{aligned}$$

Minden $g\in\mathcal{G}$ elemhez tehát van olyan $D_g\in M_n$ mátrix, hogy $F^*\,\alpha_g(F)=\mathbf{1}_{\mathcal{B}}\otimes D_g$. Balról F-el szorozva és kihasználva, hogy $F\,F^*=\widetilde{\mu}(\mathbf{1}_{\mathcal{B}})$ invariáns a csoport hatására

$$F\,F^*\,\alpha_g(F)=\alpha_g(F\,F^*\,F)=\alpha_g(F)=F\,(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}\otimes D_g)\quad .$$

A jobb oldalon megjelenő D_g mátrixok a csoport egy ábrázolását adják, ugyanis az előbbiek alapján

$$\begin{aligned}F\,(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}\otimes D_{hg})=\alpha_{hg}(F)=\alpha_h\big(\alpha_g(F)\big)=\alpha_h\big(F\,(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}\otimes D_g)\big)=\alpha_h(F)\,(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}\otimes D_g)=\\ =F\,(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}\otimes D_h)\,(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}\otimes D_g)=F\,\big(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}\otimes(D_h\,D_g)\big)\quad .\end{aligned}$$

Az $\alpha_g(F)=F\,(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}\otimes D_g)$ összefüggés pedig pontosan azt jelenti, hogy F minden sora egy D-multiplett. ■

$\mathcal{B}$-re is lokálisan kiterjedő $\mathcal{A}$-ban lokális amplimorfizmusok megtalálásához tehát az őket generáló F mátrixokat kell megtalálnunk. Ezek mátrixelemei $\mathcal{B}(I)$-ben vannak, sorai D-multiplettek, és rájuk $F^*\,F=\mathbf{1}_n$ teljesül. Az egyik legegyszerűbb lehetőség D helyébe a V_2 kétdimenziós irreducibilis ábrázolást írni, és $F\in M_{2\times2}\big(\mathcal{B}(i,i+1)\big)$ elemet keresni. Az F-re vonatkozó előbbi feltételek felírása azonban egymásnak ellentmondó egyenleteket eredményez, két elemű intervallumon lokalizált, $M_2(\mathcal{B})$-be érkező amplimorfizmus tehát csak a triviális és a 6.2.2 állításban szereplő endomorfizmusból rakható össze. Azonban V_2 multiplettekből áll, és kielégíti az $F^*\,F=\mathbf{1}_2$ feltételt a következő F mátrix:

$$F=\begin{pmatrix}P_i^-\sigma_j^- & P_i^+\sigma_j^+\\ \sigma_i^- & \sigma_i^+\\ \sigma_i^+\sigma_j^+ & \sigma_i^-\sigma_j^+\end{pmatrix}\quad .$$

Lényegében új $\mathcal{A}\to M_3(\mathcal{A})$, $\mathcal{B}$-re is kiterjedő, két ponton lokalizált amplimorfizmust kaptunk tehát ezen F segítségével $x\mapsto F\,(x\otimes\mathbf{1}_2)\,F^*$ alakban felírva.

Irodalomjegyzék

[1] R. Haag: Local Quantum Physics, Springer, 1995(??)
[2] C. W. Curtis, I. Reiner: Representation Theory of Finite Groups and Associate Algebras, Interscience, New York, 1966
[3] E. P. Wigner: Csoportelméleti módszerek a kvantummechanikában (??)
[4] K. Szlachányi, P. Vecsernyés: Quantum Symmetry and Braid Group Statistics in G-Spin Models, Commun. Math. Phys. 156, 127-168 (1993)
[GHJ] (??)

Tartalom