Csordák és árak modellje: ugró részecskék vonzó kölcsönhatással

Közös munka Rácz Miklós Zoltánnal és Tóth Bálinttal

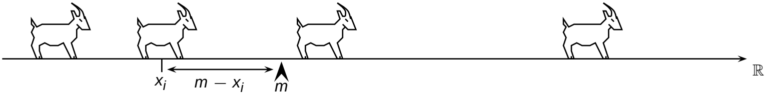
Balázs Márton

BME TTK Sztochasztika Tanszék

BME Sztochasztika Szeminárium, 2011. április 21.

A modell

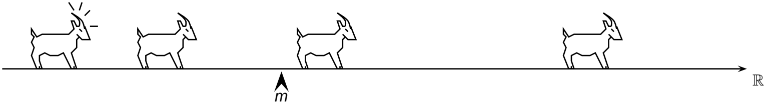
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

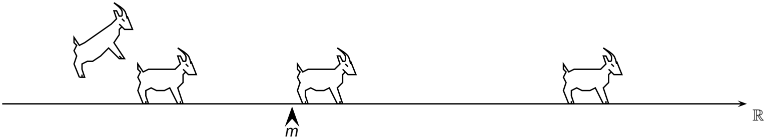
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

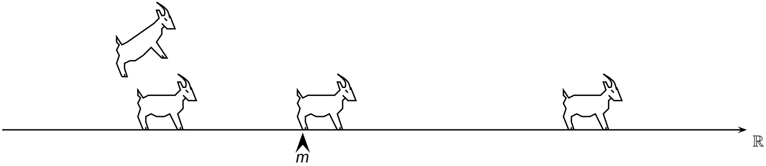
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

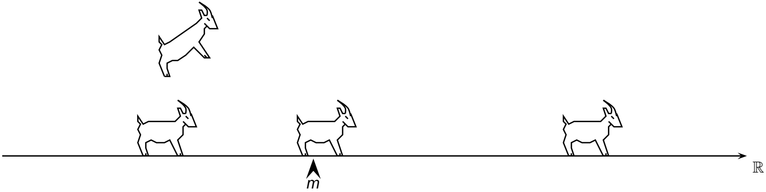
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

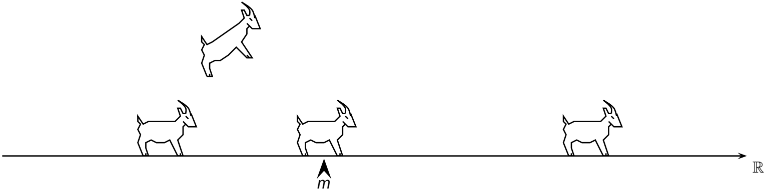
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

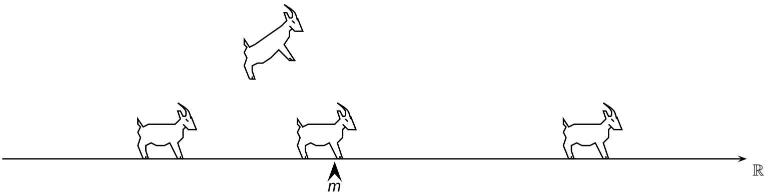
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

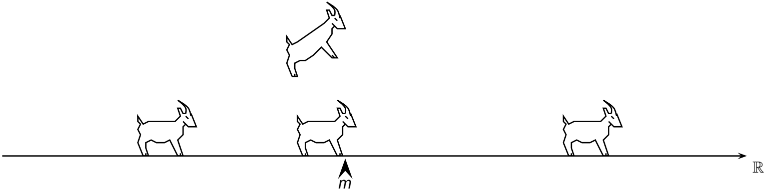
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \dots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

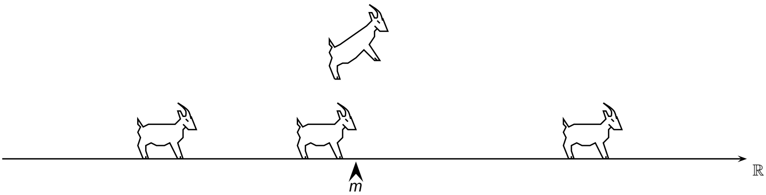
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

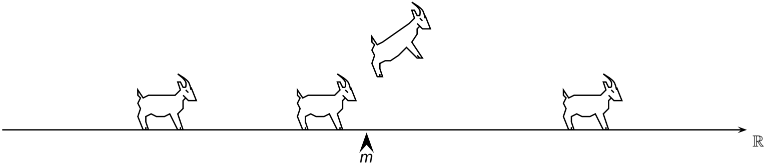
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

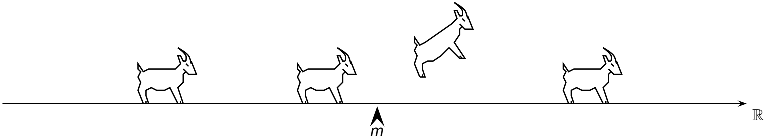
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

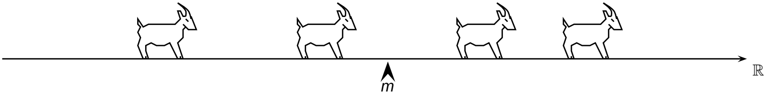
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

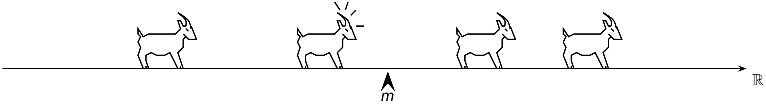
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

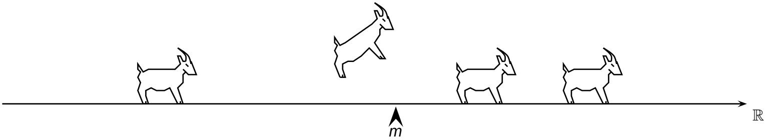
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

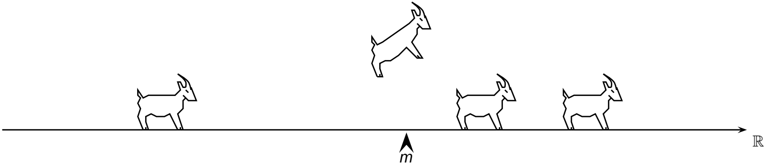
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

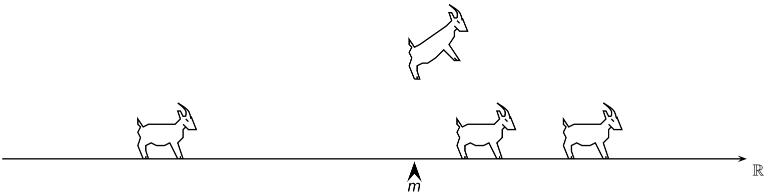
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

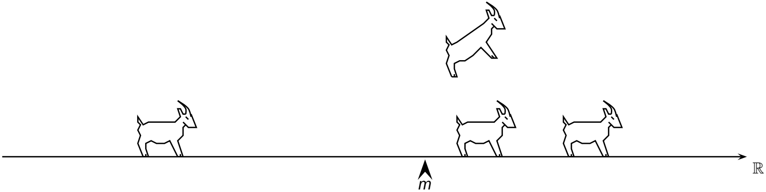
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

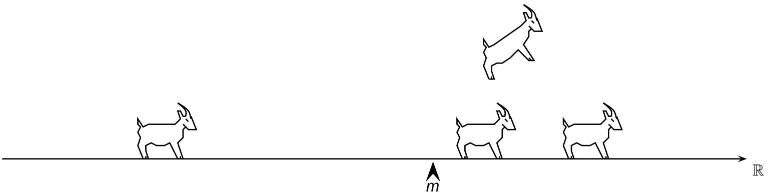
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \dots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

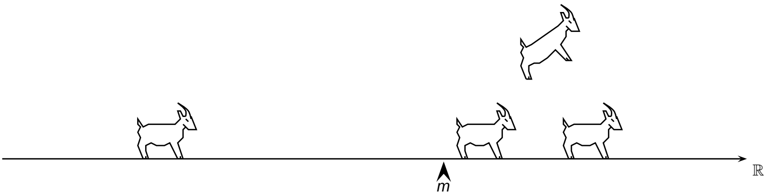
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

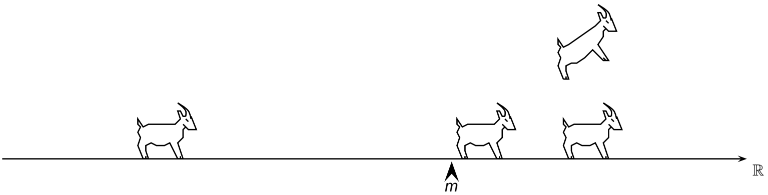
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \dots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

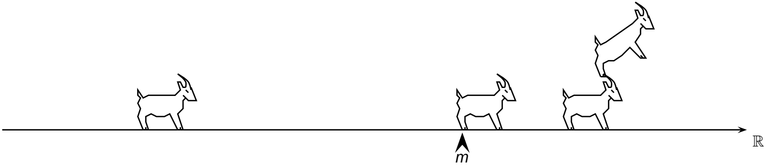
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.

- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.

- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.

- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

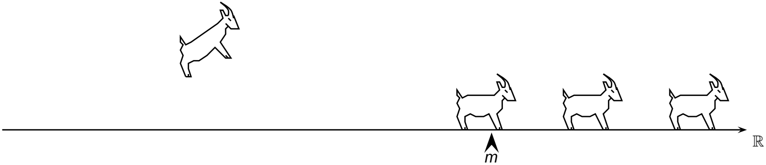
A modell

Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.

- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

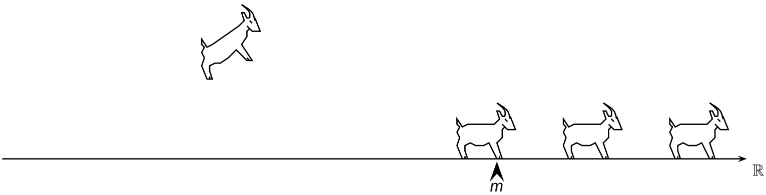
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

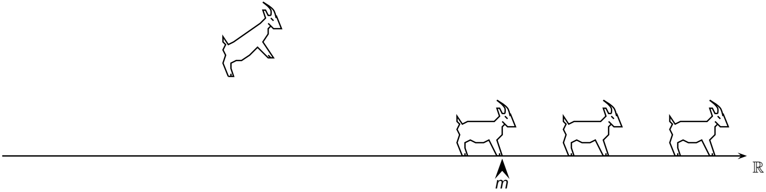
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

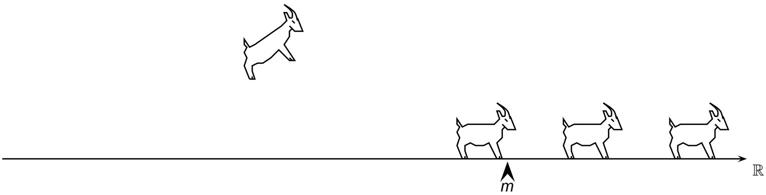
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

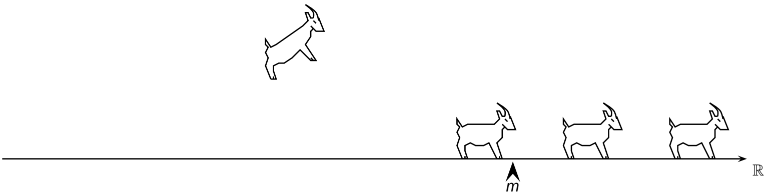
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

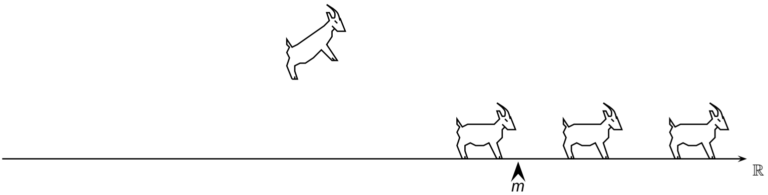
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

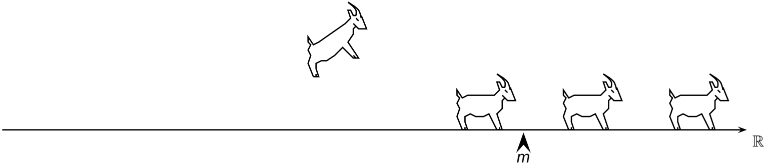
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \dots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

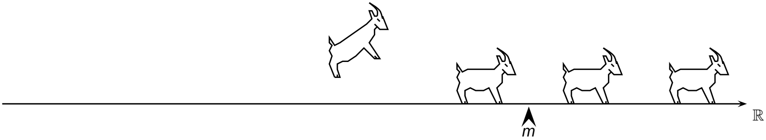
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

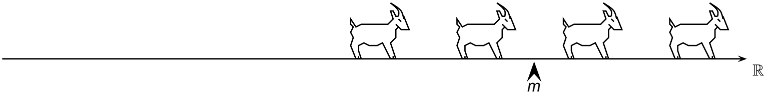
Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

Kecskék ugrálnak $\mathbb{R}$-en.



- n kecske ugrál $\mathbb{R}$-en (az állapottér $\mathbb{R}^n$).
- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kecskekonfiguráció mellett a tömegközéppont $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Az i. kecske $w(x_i - m)$ rátával ugrik, ahol w az ugrási ráta függvény: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, csökkenő.
- Az ugrások pozitívak, véletlenek, mindentől függetlenek, φ sűrűséggel, 1 várható értékkel.

A modell

Leírhatja

- rajok, csordák mozgását (mint láttuk),

A modell

Leírhatja

- rajok, csordák mozgását (mint láttuk),
- versengő termékek árait (gyros / falafel),

A modell

Leírhatja

- rajok, csordák mozgását (mint láttuk),
- versengő termékek árait (gyros / falafel),
- részvényárfolyamokat, stb.

A modell

Leírhatja

- rajok, csordák mozgását (mint láttuk),
- versengő termékek árait (gyros / falafel),
- részvényárfolyamokat, stb.

A következő féle eredményeket találtuk:

- patkányverseny modell (D. ben-Avraham, S.N. Majumdar, S. Redner 2007)
- lineáris drifttel kölcsönható diffúziók (A. Greven et. al.),
- Brown-mozgások rangfüggő drifttel (S. Pal, J. Pitman 2008, S. Chatterjee, S. Pal 2009),
- bolyongók áthelyezése (A. Manita, V. Shcherbakov 2005),
- véletlenül választott részecskék minimumát figyelve ugró részecskék (A. Greenberg, V.A. Malyshev, S.Yu. Popov 1995)
- multiplikatív ugrások (I. Grigorescu, M. Kang 2010).

Stacionárius eloszlás

Első kérdés: mi lehet a stacionárius eloszlás?

Stacionárius eloszlás

Első kérdés: mi lehet a stacionárius eloszlás? Természetesen az $m(t)$ tömegközéppontból nézve.

Stacionárius eloszlás

Első kérdés: mi lehet a stacionárius eloszlás? Természetesen az $m(t)$ tömegközéppontból nézve.

$n = 2$ részecske: Sztoch. foly. HF.

Stacionárius eloszlás

Első kérdés: mi lehet a stacionárius eloszlás? Természetesen az $m(t)$ tömegközéppontból nézve.

$n = 2$ részecske: Sztoch. foly. HF. De sosem tekintettem eddig a $\cosh^{-2}(z)$ függvényre úgy, mint sűrűségre ($\varphi \sim$Exp(1) ugrások, $w(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ ugrási ráták).

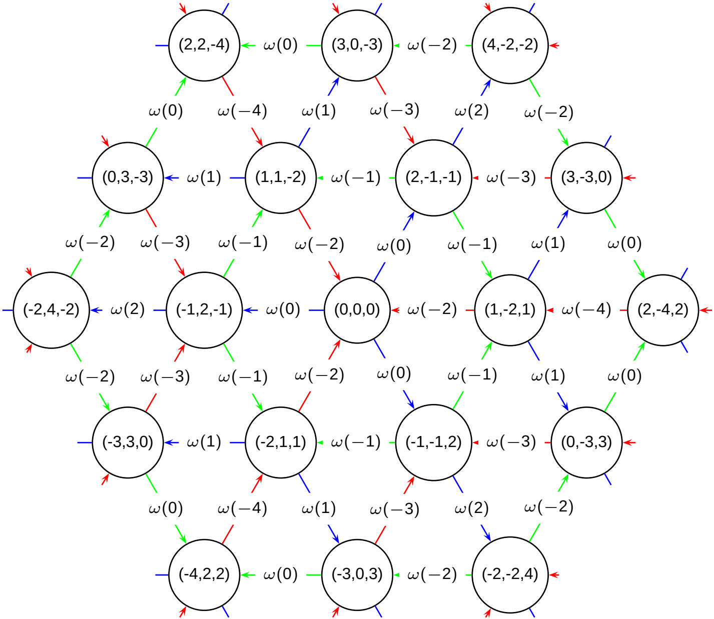
Stacionárius eloszlás

Első kérdés: mi lehet a stacionárius eloszlás? Természetesen az $m(t)$ tömegközéppontból nézve.

$n = 2$ részecske: Sztoch. foly. HF. De sosem tekintettem eddig a $\cosh^{-2}(z)$ függvényre úgy, mint sűrűségre ($\varphi \sim$Exp(1) ugrások, $w(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ ugrási ráták).

$n = 3$ részecske: reménytelennek tűnik. A folyamat “nagyon irreverzibilis”.

$n = 3$ részecske, $\equiv 1$ ugrások



Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

Legyen $n \to \infty$, a teret ne skálázzuk át, és próbáljuk meg kitalálni a részecskék limesz-sűrűségére érvényes egyenletet.

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

Legyen $n \to \infty$, a teret ne skálázzuk át, és próbáljuk meg kitalálni a részecskék limesz-sűrűségére érvényes egyenletet.

$$\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} = -w(x-m(t)) \cdot \varrho(x,t)$$

$$+\int_{-\infty}^{x} w(y-m(t)) \cdot \varrho(y,t) \cdot \varphi(x-y) \, \mathrm{d}y,$$

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

Legyen $n \to \infty$, a teret ne skálázzuk át, és próbáljuk meg kitalálni a részecskék limesz-sűrűségére érvényes egyenletet.

$$\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} = \overbrace{-w(x-m(t))}^{\text{ráta } x\text{-nél}} \cdot \varrho(x,t)$$

$$+ \int_{-\infty}^{x} w(y-m(t)) \cdot \varrho(y,t) \cdot \varphi(x-y) \,\mathrm{d}y,$$

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

Legyen $n \to \infty$, a teret ne skálázzuk át, és próbáljuk meg kitalálni a részecskék limesz-sűrűségére érvényes egyenletet.

$$\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} = \overset{\text{ráta } x\text{-nél}}{-w(x - m(t))} \cdot \overset{\text{sűrűség } x\text{-nél}}{\varrho(x,t)}$$

$$+ \int_{-\infty}^{x} w(y - m(t)) \cdot \varrho(y,t) \cdot \varphi(x-y) \, \mathrm{d}y,$$

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

Legyen $n \to \infty$, a teret ne skálázzuk át, és próbáljuk meg kitalálni a részecskék limesz-sűrűségére érvényes egyenletet.

$$\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} = -\overset{\text{ráta } x\text{-nél}}{w(x - m(t))} \cdot \overset{\text{sűrűség } x\text{-nél}}{\varrho(x,t)}$$

$$+ \int_{-\infty}^{x} \overset{\text{ráta } y\text{-nál}}{w(y - m(t))} \cdot \varrho(y,t) \cdot \varphi(x-y) \, \mathrm{d}y,$$

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

Legyen $n \to \infty$, a teret ne skálázzuk át, és próbáljuk meg kitalálni a részecskék limesz-sűrűségére érvényes egyenletet.

$$\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} = \underbrace{-w(x - m(t))}^{\text{ráta } x\text{-nél}} \cdot \overbrace{\varrho(x,t)}^{\text{sűrűség } x\text{-nél}}$$

$$+ \int_{-\infty}^{x} \overbrace{w(y - m(t))}^{\text{ráta } y\text{-nál}} \cdot \overbrace{\varrho(y,t)}^{\text{sűrűség } y\text{-nál}} \cdot \varphi(x - y) \, \mathrm{d}y,$$

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

Legyen $n \to \infty$, a teret ne skálázzuk át, és próbáljuk meg kitalálni a részecskék limesz-sűrűségére érvényes egyenletet.

$$\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} = -\underbrace{w(x - m(t))}_{\text{ráta } x\text{-nél}} \cdot \underbrace{\varrho(x,t)}_{\text{sűrűség } x\text{-nél}}$$

$$+ \int_{-\infty}^{x} \underbrace{w(y - m(t))}_{\text{ráta } y\text{-nál}} \cdot \underbrace{\varrho(y,t)}_{\text{sűrűség } y\text{-nál}} \cdot \underbrace{\varphi(x - y)}_{\text{val.-e, hogy } x\text{-be ugrik}} \, \mathrm{d}y,$$

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

Legyen $n \to \infty$, a teret ne skálázzuk át, és próbáljuk meg kitalálni a részecskék limesz-sűrűségére érvényes egyenletet.

$$\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} = \underbrace{-w(x - m(t))}_{\text{ráta } x\text{-nél}} \cdot \underbrace{\varrho(x,t)}_{\text{sűrűség } x\text{-nél}}$$

$$+ \int_{-\infty}^{x} \underbrace{w(y - m(t))}_{\text{ráta } y\text{-nál}} \cdot \underbrace{\varrho(y,t)}_{\text{sűrűség } y\text{-nál}} \cdot \underbrace{\varphi(x - y)}_{\text{val.-e, hogy } x\text{-be ugrik}} \, \mathrm{d}y,$$

és

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varrho(x,t) \, \mathrm{d}x.$$

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

Legyen $n \to \infty$, a teret ne skálázzuk át, és próbáljuk meg kitalálni a részecskék limesz-sűrűségére érvényes egyenletet.

$$\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} = \underbrace{-w(x-m(t))}_{\text{ráta } x\text{-nél}} \cdot \underbrace{\varrho(x,t)}_{\text{sűrűség } x\text{-nél}}$$

$$+ \int_{-\infty}^{x} \underbrace{w(y-m(t))}_{\text{ráta } y\text{-nál}} \cdot \underbrace{\varrho(y,t)}_{\text{sűrűség } y\text{-nál}} \cdot \underbrace{\varphi(x-y)}_{\text{val.-e, hogy } x\text{-be ugrik}} \, \mathrm{d}y,$$

és

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varrho(x,t) \, \mathrm{d}x.$$

Az egyenletek tudják, hogy $1 = \int \varrho(x,t) \, \mathrm{d}x$ és $\dot{m}(t) = \int w(x-m(t)) \cdot \varrho(x,t) \, \mathrm{d}x$.

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

Keressünk stacionárius megoldást, a tömegközéppontból nézve.
Ötlet: ahogy $n \to \infty$, a stacionárius eloszlásban $m(t)$ stabilizálódik. Tegyük fel tehát, hogy

$$m(t) = ct \qquad \text{és}$$
$$\varrho(x, t) = \varrho(x - ct).$$

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

Keressünk stacionárius megoldást, a tömegközéppontból nézve.
Ötlet: ahogy $n \to \infty$, a stacionárius eloszlásban $m(t)$ stabilizálódik. Tegyük fel tehát, hogy

$$m(t) = ct \qquad \text{és}$$
$$\varrho(x, t) = \varrho(x - ct).$$

Ezzel a feltevéssel

$$-c\varrho'(x) = -w(x)\varrho(x) + \int_{-\infty}^{x} w(y)\varrho(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y,$$
$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} y\varrho(y)\,\mathrm{d}y.$$

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

$$-c\varrho'(x) = -w(x)\varrho(x) + \int_{-\infty}^{x} w(y)\varrho(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

$$-c\varrho'(x) = -w(x)\varrho(x) + \int_{-\infty}^{x} w(y)\varrho(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Amikor meg tudjuk oldani:

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

$$-c\varrho'(x) = -w(x)\varrho(x) + \int_{-\infty}^{x} w(y)\varrho(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Amikor meg tudjuk oldani:

- Ha az ugrások $\sim$ Exp(1): $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$, az egyenlet egy lineáris másodrendű közönséges egyenletbe megy át, könnyű.

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

$$-c\varrho'(x) = -w(x)\varrho(x) + \int_{-\infty}^{x} w(y)\varrho(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Amikor meg tudjuk oldani:

- Ha az ugrások $\sim$ Exp(1): $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$, az egyenlet egy lineáris másodrendű közönséges egyenletbe megy át, könnyű.
  - Ha $w(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}$,

$$\varrho(x) = G_{\frac{1}{\beta}}(\mathrm{const}\cdot x),$$

$G_{\frac{1}{\beta}}$ az általánosított Gumbel sűrűség.

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

$$-c\varrho'(x) = -w(x)\varrho(x) + \int_{-\infty}^{x} w(y)\varrho(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Amikor meg tudjuk oldani:

- Ha az ugrások $\sim$ Exp(1): $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$, az egyenlet egy lineáris másodrendű közönséges egyenletbe megy át, könnyű.
  - Ha $w(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}$,

    $$\varrho(x) = G_{\frac{1}{\beta}}(\mathrm{const}\cdot x),$$

    $G_{\frac{1}{\beta}}$ az általánosított Gumbel sűrűség.
  - Ha w egy (le-)lépcsőfüggvény, ϱ a Laplace sűrűség.

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

$$-c\varrho'(x) = -w(x)\varrho(x) + \int_{-\infty}^{x} w(y)\varrho(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Amikor meg tudjuk oldani:

- Ha az ugrások $\sim$ Exp(1): $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$, az egyenlet egy lineáris másodrendű közönséges egyenletbe megy át, könnyű.
  - Ha $w(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}$,

    $$\varrho(x) = G_{\frac{1}{\beta}}(\mathrm{const}\cdot x),$$

    $G_{\frac{1}{\beta}}$ az általánosított Gumbel sűrűség.
  - Ha w egy (le-)lépcsőfüggvény, ϱ a Laplace sűrűség.
  - Ha w két konstans között a 0 körül egy lineáris szakasszal csökken, ϱ Laplace, középen egy normális szakasszal.

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

$$-c\varrho'(x) = -w(x)\varrho(x) + \int_{-\infty}^{x} w(y)\varrho(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Amikor meg tudjuk oldani:

- Ha az ugrások $\sim$ Exp(1): $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$, az egyenlet egy lineáris másodrendű közönséges egyenletbe megy át, könnyű.
  - Ha $w(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}$,

    $$\varrho(x) = G_{\frac{1}{\beta}}(\mathrm{const}\cdot x),$$

    $G_{\frac{1}{\beta}}$ az általánosított Gumbel sűrűség.
  - Ha w egy (le-)lépcsőfüggvény, ϱ a Laplace sűrűség.
  - Ha w két konstans között a 0 körül egy lineáris szakasszal csökken, ϱ Laplace, középen egy normális szakasszal.

Extrém eloszlások (Rákos Attila)

Ha az ugrások $\sim$Exp(1): $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$,
az ugrási ráta is exponenciális: $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$,
$\rightsquigarrow \varrho(x) = G(\mathrm{const} \cdot x)$, standard Gumbel sűrűség. Miért?

Extrém eloszlások (Rákos Attila)

Ha az ugrások $\sim$Exp(1): $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$,
az ugrási ráta is exponenciális: $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$,
$\rightsquigarrow$ $\varrho(x) = G(\mathrm{const} \cdot x)$, standard Gumbel sűrűség. Miért?

Tekintsünk egy $X(t)$ részecskét. Annak valószínűsége, hogy t és $t + \mathrm{d}t$ között ugrik kb. $\mathrm{e}^{ct - X(t)}\,\mathrm{d}t$. És ha ugrik, Exp(1) eloszlásút ugrik.

Extrém eloszlások (Rákos Attila)

Ha az ugrások $\sim$Exp(1): $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$,
az ugrási ráta is exponenciális: $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$,
$\rightsquigarrow$ $\varrho(x) = G(\mathrm{const} \cdot x)$, standard Gumbel sűrűség. Miért?

Tekintsünk egy $X(t)$ részecskét. Annak valószínűsége, hogy t és $t + \mathrm{d}t$ között ugrik kb. $\mathrm{e}^{ct - X(t)}\,\mathrm{d}t$. És ha ugrik, Exp(1) eloszlásút ugrik.

Extrém eloszlások (Rákos Attila)

Ha az ugrások ∼Exp(1): $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$,
az ugrási ráta is exponenciális: $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$,
$\rightsquigarrow$ $\varrho(x) = G(\mathrm{const} \cdot x)$, standard Gumbel sűrűség. Miért?

Tekintsünk egy $X(t)$ részecskét. Annak valószínűsége, hogy t és $t + \mathrm{d}t$ között ugrik kb. $\mathrm{e}^{ct - X(t)}\,\mathrm{d}t$. És ha ugrik, Exp(1) eloszlásút ugrik.

Tekintsünk most egyre több és több fae. Exp(1) változót. t-kor legyen belőlük $N(t) = \mathrm{e}^{ct}/c$ db. Legyen $Y(t)$ a maximumuk.

Extrém eloszlások (Rákos Attila)

Ha az ugrások ∼Exp(1): $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$,
az ugrási ráta is exponenciális: $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$,
$\rightsquigarrow \varrho(x) = G(\mathrm{const}\cdot x)$, standard Gumbel sűrűség. Miért?

Tekintsünk egy $X(t)$ részecskét. Annak valószínűsége, hogy t és $t + \mathrm{d}t$ között ugrik kb. $\mathrm{e}^{ct - X(t)}\,\mathrm{d}t$. És ha ugrik, Exp(1) eloszlásút ugrik.

Tekintsünk most egyre több és több fae. Exp(1) változót. t-kor legyen belőlük $N(t) = \mathrm{e}^{ct}/c$ db. Legyen $Y(t)$ a maximumuk.

t és $t + \mathrm{d}t$ között $\mathrm{d}N(t) = \mathrm{e}^{ct}\,\mathrm{d}t$ db új Exp(1) változó próbál rekordot dönteni. Tehát annak valószínűsége, hogy az $Y(t)$ rekord ugrik

$$1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-Y(t)}\right)^{\mathrm{e}^{ct}\,\mathrm{d}t} \simeq \mathrm{e}^{ct - Y(t)}\,\mathrm{d}t \qquad (\text{nagy } Y(t)\text{-re}).$$

És ha ugrik, Exp(1) eloszlásút ugrik. Viszont tudjuk, hogy $Y(t) - ct + \log c$ standard Gumbel eloszláshoz konvergál.

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

$$-c\varrho'(x) = -w(x)\varrho(x) + \int_{-\infty}^{x} w(y)\varrho(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

$$-c\varrho'(x) = -w(x)\varrho(x) + \int_{-\infty}^{x} w(y)\varrho(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Amikor meg tudjuk oldani:

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

$$-c\varrho'(x) = -w(x)\varrho(x) + \int_{-\infty}^{x} w(y)\varrho(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Amikor meg tudjuk oldani:

- Láttuk: ha az ugrások $\sim$Exp(1): $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$, az egyenlet másodrendű köz.diff. lesz, könnyű.

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

$$-c\varrho'(x) = -w(x)\varrho(x) + \int_{-\infty}^{x} w(y)\varrho(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Amikor meg tudjuk oldani:

- Láttuk: ha az ugrások $\sim$Exp(1): $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$, az egyenlet másodrendű köz.diff. lesz, könnyű.
- Ha $w(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}$ exponenciális: vegyük a Fourier transzformáltat:

$$ci\tau\widehat{\varrho}(\tau) = \big(\widehat{\varphi}(\tau) - 1\big) \cdot \widehat{\varrho}(\tau + i\beta).$$

A rekurzió remélhetőleg megoldható az $\mathfrak{Im}$ tengelyen, és az analitikus folytatás ad egy ellenőrizendő tippet $\widehat{\varrho}$ alakjára.

Folyadék limesz: egy mean field egyenlet

$$-c\varrho'(x) = -w(x)\varrho(x) + \int_{-\infty}^{x} w(y)\varrho(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Amikor meg tudjuk oldani:

- Láttuk: ha az ugrások $\sim$Exp(1): $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$, az egyenlet másodrendű köz.diff. lesz, könnyű.
- Ha $w(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}$ exponenciális: vegyük a Fourier transzformáltat:

$$ci\tau\widehat{\varrho}(\tau) = \big(\widehat{\varphi}(\tau) - 1\big)\cdot\widehat{\varrho}(\tau + i\beta).$$

  A rekurzió remélhetőleg megoldható az $\mathfrak{Im}$ tengelyen, és az analitikus folytatás ad egy ellenőrizendő tippet $\widehat{\varrho}$ alakjára.
  - A módszer működik, ha $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$ (ezt már néztük korábban is), a remény, hogy egyéb φ-kre is működhet.

Folyadék limesz

Emlékezzünk az eredeti mean field egyenletre:

$$\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} = -w(x - m(t)) \cdot \varrho(x,t) + \int_{-\infty}^{x} w(y - m(t)) \cdot \varrho(y,t) \cdot \varphi(x - y)\, \mathrm{d}y,$$

azaz minden f tesztfüggvényre:

$$\langle f, \mu(t)\rangle - \langle f, \mu(0)\rangle = \int_0^t \Big\langle \Big\{ \mathbf{E}[f(x+Z)] - f(x) \Big\} w(x - m(s)),\, \mu(s) \Big\rangle\, \mathrm{d}s,$$
$$m(s) = \langle x,\, \mu(s)\rangle.$$

Itt $\mathbf{E}$ a Z ugrási hossz φ szerinti várható értéke.

Folyadék limesz

A mean field egyenlet:

$$\begin{aligned}
\langle f, \mu(t)\rangle - \langle f, \mu(0)\rangle \\
&= \int_0^t \Big\langle \big\{ \mathbf{E}[f(x+Z)] - f(x) \big\}\, w(x - m(s)),\ \mu(s) \Big\rangle \, \mathrm{d}s, \\
m(s) &= \langle x,\ \mu(s)\rangle.
\end{aligned}$$

Folyadék limesz

A mean field egyenlet:

$$\begin{aligned}
\langle f, \mu(t)\rangle - \langle f, \mu(0)\rangle \\
&= \int_0^t \Big\langle \big\{\mathbf{E}[f(x+Z)] - f(x)\big\} w(x - m(s)),\ \mu(s)\Big\rangle \,\mathrm{d}s, \\
m(s) &= \langle x,\ \mu(s)\rangle.
\end{aligned}$$

Az n-részecske empírikus mérték: $\mu_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i(t)}$.

Cél:

Folyadék limesz

A mean field egyenlet:

$$\begin{aligned}
&\langle f, \mu(t)\rangle - \langle f, \mu(0)\rangle \\
&\qquad = \int_0^t \Big\langle \big\{\mathbf{E}[f(x+Z)] - f(x)\big\}\, w(x - m(s)),\ \mu(s)\Big\rangle\ \mathrm{d}s, \\
&m(s) = \langle x,\ \mu(s)\rangle.
\end{aligned}$$

Az n-részecske empírikus mérték: $\mu_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i(t)}$.

Cél:

1. $\{\mu_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ feszessége valamely mérték-trajektória térben.

Folyadék limesz

A mean field egyenlet:

$$\begin{aligned}\langle f, \mu(t)\rangle - \langle f, \mu(0)\rangle \\ &= \int_0^t \Big\langle \big\{ \mathbf{E}[f(x+Z)] - f(x) \big\} w(x - m(s)),\ \mu(s) \Big\rangle \,\mathrm{d}s, \\ m(s) = \langle x,\ \mu(s)\rangle.\end{aligned}$$

Az n-részecske empírikus mérték: $\mu_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i(t)}$.

Cél:

1. $\{\mu_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ feszessége valamely mérték-trajektória térben.
2. Gyenge limeszek a fenti egyenlet egy $\mu(\cdot)$ megoldásához konvergálnak.

Folyadék limesz

A mean field egyenlet:

$$\begin{aligned}\langle f, \mu(t)\rangle - \langle f, \mu(0)\rangle \\ &= \int_0^t \Big\langle \Big\{\mathbf{E}[f(x+Z)] - f(x)\Big\} w(x - m(s)),\ \mu(s)\Big\rangle\, \mathrm{d}s, \\ m(s) = \langle x,\ \mu(s)\rangle.\end{aligned}$$

Az n-részecske empírikus mérték: $\mu_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i(t)}$.

Cél:

1. $\{\mu_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ feszessége valamely mérték-trajektória térben.
2. Gyenge limeszek a fenti egyenlet egy $\mu(\cdot)$ megoldásához konvergálnak.
3. A fenti egyenlet megoldása egyértelmű.

Folyadék limesz

A mean field egyenlet:

$$\begin{aligned}\langle f,\mu(t)\rangle - \langle f,\mu(0)\rangle \\ &= \int_0^t \Big\langle \big\{\mathbf{E}[f(x+Z)] - f(x)\big\}\, w(x-m(s)),\ \mu(s)\Big\rangle \,\mathrm{d}s,\\ m(s) &= \langle x,\ \mu(s)\rangle.\end{aligned}$$

Az n-részecske empírikus mérték: $\mu_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i(t)}$.

Cél:

1. $\{\mu_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ feszessége valamely mérték-trajektória térben.
2. Gyenge limeszek a fenti egyenlet egy $\mu(\cdot)$ megoldásához konvergálnak.
3. A fenti egyenlet megoldása egyértelmű.

Feltevések: a w rátafüggvény korlátos; a φ ugrás-eloszlás harmadik momentuma véges.

Folyadék limesz

A mean field egyenlet:

$$\langle f, \mu(t)\rangle - \langle f, \mu(0)\rangle = \int_0^t \left\langle \left\{ \mathbf{E}[f(x+Z)] - f(x) \right\} w(x - m(s)), \mu(s) \right\rangle \,\mathrm{d}s,$$

$$m(s) = \langle x, \mu(s)\rangle \quad !!!$$

Az n-részecske empírikus mérték: $\mu_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i(t)}$.

Cél:

1. $\{\mu_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ feszessége valamely mérték-trajektória térben.
2. Gyenge limeszek a fenti egyenlet egy $\mu(\cdot)$ megoldásához konvergálnak.
3. A fenti egyenlet megoldása egyértelmű.

Feltevések: a w rátafüggvény korlátos; a φ ugrás-eloszlás harmadik momentuma véges.

Probléma: korlátos tesztfüggvények és “csak mértékek” nem elég!

Hol is élünk?

Valószínűségi mértékek $\mathbb{R}$-en véges várható értékkel: $\mathcal{P}_1$.

Hol is élünk?

Valószínűségi mértékek $\mathbb{R}$-en véges várható értékkel: $\mathcal{P}_1$.

Wasserstein metrika $\mathcal{P}_1$-n:

$$d_1(\mu,\nu) = \inf_{\pi:\text{ csatolási mérték.}} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |x-y|\,\pi(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y).$$

Hol is élünk?

Valószínűségi mértékek $\mathbb{R}$-en véges várható értékkel: $\mathcal{P}_1$.

Wasserstein metrika $\mathcal{P}_1$-n:

$$d_1(\mu,\,\nu) = \inf_{\pi:\text{ csatolási mérték.}} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |x - y|\,\pi(\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y).$$

Tesztfüggvények:

$$\{f\ :\ \text{folytonos; } |f| \le 1\} \cup \{\mathrm{Id}\}.$$

Ilyen függvények integráljainak konvergenciája következik a d_1-beli konvergenciából.

Hol is élünk?

Valószínűségi mértékek $\mathbb{R}$-en véges várható értékkel: $\mathcal{P}_1$.

Wasserstein metrika $\mathcal{P}_1$-n:

$$d_1(\mu, \nu) = \inf_{\pi:\,\text{csatolási mérték.}} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |x - y|\, \pi(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y).$$

Tesztfüggvények:

$$\{f\ :\ \text{folytonos; } |f| \leq 1\} \cup \{\mathrm{Id}\}.$$

Ilyen függvények integráljainak konvergenciája következik a d_1-beli konvergenciából.

Mindez azért kell, hogy az

$$m(s) = \langle x,\ \mu(s)\rangle$$

tömegközéppontot kezelhessük.

Hol is élünk?

Valószínűségi mértékek $\mathbb{R}$-en véges várható értékkel: $\mathcal{P}_1$.

Wasserstein metrika $\mathcal{P}_1$-n:

$$d_1(\mu, \nu) = \inf_{\pi:\,\text{csatolási mérték.}} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |x - y|\, \pi(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y).$$

Tesztfüggvények:

$$\{f\ :\ \text{folytonos; } |f| \leq 1\} \cup \{\mathrm{Id}\}.$$

Ilyen függvények integráljainak konvergenciája következik a d_1-beli konvergenciából.

Mindez azért kell, hogy az

$$m(s) = \langle x, \mu(s)\rangle$$

tömegközéppontot kezelhessük.

Cél: a $\mu_n(t)$ n-részecske empírikus mértékek konvergenciája a $D([0, \infty), \mathcal{P}_1)$ Skohorod térben.

1. Feszesség

- 1. lépés: $\langle f, \mu_n(t)\rangle$ feszessége $D([0, \infty], \mathbb{R})$-ben; f korlátos, folytonos. (Grigorescu-Kang 2010)

1. Feszesség

- 1. lépés: $\langle f, \mu_n(t)\rangle$ feszessége $D([0,\infty],\mathbb{R})$-ben; f korlátos, folytonos. (Grigorescu-Kang 2010)
  - Kezdeti eloszlásra kellenek korlátok (ezeket feltesszük),

1. Feszesség

- 1. lépés: $\langle f, \mu_n(t)\rangle$ feszessége $D([0, \infty], \mathbb{R})$-ben; f korlátos, folytonos. (Grigorescu-Kang 2010)
  - Kezdeti eloszlásra kellenek korlátok (ezeket feltesszük),
  - ugrásokra egyenletes korlátok (Billingsley könyve).

1. Feszesség

- 1. lépés: $\langle f, \mu_n(t) \rangle$ feszessége $D([0, \infty], \mathbb{R})$-ben; f korlátos, folytonos. (Grigorescu-Kang 2010)
  - Kezdeti eloszlásra kellenek korlátok (ezeket feltesszük),
  - ugrásokra egyenletes korlátok (Billingsley könyve).
- 2. lépés: Minden limeszpont m.b. folytonos.

1. Feszesség

- 1. lépés: $\langle f, \mu_n(t)\rangle$ feszessége $D([0, \infty], \mathbb{R})$-ben; f korlátos, folytonos. (Grigorescu-Kang 2010)
  - Kezdeti eloszlásra kellenek korlátok (ezeket feltesszük),
  - ugrásokra egyenletes korlátok (Billingsley könyve).
- 2. lépés: Minden limeszpont m.b. folytonos.
  - További feltételek az ugrásokra (Ethier-Kurtz).

1. Feszesség

- 1. lépés: $\langle f, \mu_n(t)\rangle$ feszessége $D([0,\infty],\mathbb{R})$-ben; f korlátos, folytonos. (Grigorescu-Kang 2010)
  - Kezdeti eloszlásra kellenek korlátok (ezeket feltesszük),
  - ugrásokra egyenletes korlátok (Billingsley könyve).
- 2. lépés: Minden limeszpont m.b. folytonos.
  - További feltételek az ugrásokra (Ethier-Kurtz).

$\}$ *C-relatív kompaktság*

1. Feszesség

- 1. lépés: $\langle f, \mu_n(t)\rangle$ feszessége $D([0, \infty], \mathbb{R})$-ben; f korlátos, folytonos. (Grigorescu-Kang 2010)
  - Kezdeti eloszlásra kellenek korlátok (ezeket feltesszük),
  - ugrásokra egyenletes korlátok (Billingsley könyve).
- 2. lépés: Minden limeszpont m.b. folytonos.
  - További feltételek az ugrásokra (Ethier-Kurtz).

$\}$ *C-relatív kompaktság*

Módszer ezekre a korlátokra: *szellemkecskék*: $\sup_x w(x)$ rátával ugranak, és ugyanakkorákat mint halandó megfelelőik. Csatolás: a szellemkecske$_i$ ugorhat kecske$_i$ nélkül, de fordítva nem. $\rightsquigarrow$ A szellemkecskék növekménye dominálja a halandók növekményeit.

1. Feszesség

- 3. lépés: $\mu_n(t)$ $D([0,\infty],\mathcal{P}_1)$-beli C-relatív kompaktsága.

1. Feszesség

- 3. lépés: $\mu_n(t)$ $D([0, \infty], \mathcal{P}_1)$-beli C-relatív kompaktsága.
  - Kompaktság-szerű feltételek ellenőrzése $\mu_n(t)$-re, n-ben és t-ben egyenletesen,

1. Feszesség

- 3. lépés: $\mu_n(t)$ $D([0, \infty], \mathcal{P}_1)$-beli C-relatív kompaktsága.
  - Kompaktság-szerű feltételek ellenőrzése $\mu_n(t)$-re, n-ben és t-ben egyenletesen,
  - $\langle f, \mu_n(t)\rangle$ C-relatív kompaktsága $D([0, \infty], \mathbb{R})$-ben az előző oldalról.

1. Feszesség

- 3. lépés: $\mu_n(t)$ $D([0,\infty],\mathcal{P}_1)$-beli C-relatív kompaktsága.
  - Kompaktság-szerű feltételek ellenőrzése $\mu_n(t)$-re, n-ben és t-ben egyenletesen,
  - $\langle f,\mu_n(t)\rangle$ C-relatív kompaktsága $D([0,\infty],\mathbb{R})$-ben az előző oldalról.
  - Perkins tételének általánosítása (Perkins, St.-Flour notes, 1999).

1. Feszesség

- 3. lépés: $\mu_n(t)$ $D([0, \infty], \mathcal{P}_1)$-beli C-relatív kompaktsága.
  - Kompaktság-szerű feltételek ellenőrzése $\mu_n(t)$-re, n-ben és t-ben egyenletesen,
  - $\langle f, \mu_n(t)\rangle$ C-relatív kompaktsága $D([0, \infty], \mathbb{R})$-ben az előző oldalról.
  - Perkins tételének általánosítása (Perkins, St.-Flour notes, 1999).

A kompaktság-szerű feltételekhez megint szellemkecskét használunk.

1. Feszesség

- 3. lépés: $\mu_n(t)$ $D([0,\infty],\mathcal{P}_1)$-beli C-relatív kompaktsága.
  - Kompaktság-szerű feltételek ellenőrzése $\mu_n(t)$-re, n-ben és t-ben egyenletesen,
  - $\langle f,\mu_n(t)\rangle$ C-relatív kompaktsága $D([0,\infty],\mathbb{R})$-ben az előző oldalról.
  - Perkins tételének általánosítása (Perkins, St.-Flour notes, 1999).

A kompaktság-szerű feltételekhez megint szellemkecskét használunk.

Perkins eredeti tétele $\langle f,\mu_n(t)\rangle$ integrálok $D([0,\infty],\mathbb{R})$-beli C-relatív kompaktságából vezette le a $D([0,\infty],\mathcal{M})$-beli C-relatív kompaktságot. A tételt ki kellett terjesztenünk az $\mathcal{M}$ véges mértékekről a $\mathcal{P}_1$ véges első momentumú mértékekre.

2. A limesz megoldja a mean field egyenletet

Legyen

$$
\begin{aligned}
A_{t,f}(\mu) &:= \langle f, \mu(t)\rangle - \langle f, \mu(0)\rangle \\
&\qquad - \int_0^t \Big\langle \big\{\mathbf{E}[f(x+Z)] - f(x)\big\} w(x - m(s)),\, \mu(s)\Big\rangle \, \mathrm{d}s \\
&= \langle f, \mu(t)\rangle - \langle f, \mu(0)\rangle - \int_0^t L\langle f, \mu(s)\rangle \, \mathrm{d}s, \\
m(s) &= \langle x,\, \mu(s)\rangle.
\end{aligned}
$$

A mean field egyenlet:

$$A_{t,f}(\mu) = 0.$$

2. A limesz megoldja a mean field egyenletet

- 1. lépés:

$$\sup_{0 \le s \le t} |A_{s,f}(\mu_n)| \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} 0$$

valószínűségben.

2. A limesz megoldja a mean field egyenletet

- 1. lépés:

$$\sup_{0\le s\le t} |A_{s,f}(\mu_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$$

  valószínűségben.
- 2. lépés: Ha $\mu_n \Rightarrow \mu \quad D([0,\infty], \mathcal{P}_1)$-ben, akkor

$$A_{s,f}(\mu_n) \Rightarrow A_{s,f}(\mu)$$

  $\mathbb{R}$-en.

2. A limesz megoldja a mean field egyenletet

- 1. lépés:

$$\sup_{0\le s\le t} |A_{s,f}(\mu_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$$

  valószínűségben.

- 2. lépés: Ha $\mu_n \Rightarrow \mu \quad D([0,\infty], \mathcal{P}_1)$-ben, akkor

$$A_{s,f}(\mu_n) \Rightarrow A_{s,f}(\mu)$$

  $\mathbb{R}$-en.

1-hez vegyük észre, hogy $A_{s,f}(\mu_n)$ martingál s-ben. $\mathcal{L}^2$ Doob egyenlőtlenséggel az $\mathcal{L}^2$ norma nullához tart ahogy $n \to \infty$.

2. A limesz megoldja a mean field egyenletet

- 1. lépés:

$$\sup_{0\le s\le t} |A_{s,f}(\mu_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$$

valószínűségben.

- 2. lépés: Ha $\mu_n \Rightarrow \mu \quad D([0,\infty], \mathcal{P}_1)$-ben, akkor

$$A_{s,f}(\mu_n) \Rightarrow A_{s,f}(\mu)$$

$\mathbb{R}$-en.

1-hez vegyük észre, hogy $A_{s,f}(\mu_n)$ martingál s-ben. $\mathcal{L}^2$ Doob egyenlőtlenséggel az $\mathcal{L}^2$ norma nullához tart ahogy $n \to \infty$.

2-höz a $D([0,\infty], \mathcal{P}_1)$-beli konvergencia a d_1 Wasserstein metrikával pont megfelelő a teszfüggvényeinkhez (beleértve a tömegközéppontot!).

3. A mean field egyenlet egyértelműsége

- 1. lépés: tekintsük a

$$d_H(\mu, \nu) := \sup_f |\langle f, \mu\rangle - \langle f, \nu\rangle|$$

távolságot; sup a tesztfüggvényeinken van.

3. A mean field egyenlet egyértelműsége

- 1. lépés: tekintsük a

$$d_H(\mu, \nu) := \sup_f |\langle f, \mu\rangle - \langle f, \nu\rangle|$$

  távolságot; sup a tesztfüggvényeinken van.
- 2. lépés: A mean field egyenlet $\mu(t)$ és $\nu(t)$ megoldásának:

$$\langle f, \mu(t)\rangle = \langle f, \mu(0)\rangle + \int_0^t \Big\langle \Big\{ \mathbf{E}[f(x+Z)] - f(x) \Big\} w(x - m(s)),\ \mu(s) \Big\rangle \, \mathrm{d}s$$

  távolságában az integrálok különbsége $d_H(\mu(s), \nu(s))$-el becsülhető.

3. A mean field egyenlet egyértelműsége

- 1. lépés: tekintsük a

$$d_H(\mu,\,\nu) := \sup_f |\langle f,\,\mu\rangle - \langle f,\,\nu\rangle|$$

távolságot; sup a tesztfüggvényeinken van.

- 2. lépés: A mean field egyenlet $\mu(t)$ és $\nu(t)$ megoldásának:

$$\langle f, \mu(t)\rangle = \langle f, \mu(0)\rangle + \int_0^t \Big\langle \big\{\mathbf{E}[f(x+Z)] - f(x)\big\}\, w(x - m(s)),\ \mu(s)\Big\rangle\, \mathrm{d}s$$

távolságában az integrálok különbsége $d_H(\mu(s),\,\nu(s))$-el becsülhető.

$\rightsquigarrow d_H(\mu(t),\,\nu(t)) \le d_H(\mu(0),\,\nu(0)) + c\int_0^t d_H(\mu(s),\,\nu(s))\,\mathrm{d}s$, jöhet Grönwall egyenlőtlensége.

Kérdések

- A tömegközéppont szórásnégyzetének skálázása:

$$\mathbf{Var}(m_n(t)) \sim \frac{t^\gamma}{n^\alpha}.$$

Miklós végzett (kis) szimulációkat. Úgy tűnik, hogy:

Kérdések

- A tömegközéppont szórásnégyzetének skálázása:

$$\mathbf{Var}(m_n(t)) \sim \frac{t^{\gamma}}{n^{\alpha}}.$$

  Miklós végzett (kis) szimulációkat. Úgy tűnik, hogy:
  - Exponenciális ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq \alpha \simeq 1$.

Kérdések

- A tömegközéppont szórásnégyzetének skálázása:

$$\mathbf{Var}(m_n(t)) \sim \frac{t^\gamma}{n^\alpha}.$$

Miklós végzett (kis) szimulációkat. Úgy tűnik, hogy:

  - Exponenciális ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq \alpha \simeq 1$.
  - Lépcsőfüggvény ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq 1, \ 1/2 \leq \alpha \leq 1$.

Kérdések

- A tömegközéppont szórásnégyzetének skálázása:

$$\mathbf{Var}(m_n(t)) \sim \frac{t^\gamma}{n^\alpha}.$$

  Miklós végzett (kis) szimulációkat. Úgy tűnik, hogy:
  - Exponenciális ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq \alpha \simeq 1$.
  - Lépcsőfüggvény ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq 1,\ 1/2 \leq \alpha \leq 1$.
  - Két konstans közt lineáris ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq 1,\ 1/2 \leq \alpha \leq 1$.

Kérdések

- A tömegközéppont szórásnégyzetének skálázása:

  $$\mathbf{Var}(m_n(t)) \sim \frac{t^\gamma}{n^\alpha}.$$

  Miklós végzett (kis) szimulációkat. Úgy tűnik, hogy:
  - Exponenciális ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq \alpha \simeq 1$.
  - Lépcsőfüggvény ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq 1,\ 1/2 \leq \alpha \leq 1$.
  - Két konstans közt lineáris ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq 1,\ 1/2 \leq \alpha \leq 1$.
- Határeloszlástételek általában?

Kérdések

- A tömegközéppont szórásnégyzetének skálázása:

$$\mathbf{Var}(m_n(t)) \sim \frac{t^\gamma}{n^\alpha}.$$

  Miklós végzett (kis) szimulációkat. Úgy tűnik, hogy:
  - Exponenciális ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq \alpha \simeq 1$.
  - Lépcsőfüggvény ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq 1,\ 1/2 \leq \alpha \leq 1$.
  - Két konstans közt lineáris ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq 1,\ 1/2 \leq \alpha \leq 1$.
- Határeloszlástételek általában?
- Tényleg nem tudjuk felírni három kecske stacionárius eloszlását?

Kérdések

- A tömegközéppont szórásnégyzetének skálázása:

$$\mathbf{Var}(m_n(t)) \sim \frac{t^\gamma}{n^\alpha}.$$

  Miklós végzett (kis) szimulációkat. Úgy tűnik, hogy:
  - Exponenciális ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq \alpha \simeq 1$.
  - Lépcsőfüggvény ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq 1,\ 1/2 \le \alpha \le 1$.
  - Két konstans közt lineáris ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq 1,\ 1/2 \le \alpha \le 1$.
- Határeloszlástételek általában?
- Tényleg nem tudjuk felírni három kecske stacionárius eloszlását?
- Fluid limesz általános rátafüggvényekre / ugrás eloszlásokra?

Kérdések

- A tömegközéppont szórásnégyzetének skálázása:

$$\mathbf{Var}(m_n(t)) \sim \frac{t^\gamma}{n^\alpha}.$$

Miklós végzett (kis) szimulációkat. Úgy tűnik, hogy:

  - Exponenciális ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq \alpha \simeq 1$.
  - Lépcsőfüggvény ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq 1,\ 1/2 \leq \alpha \leq 1$.
  - Két konstans közt lineáris ugrási ráták, exponenciális ugrás hosszak: $\gamma \simeq 1,\ 1/2 \leq \alpha \leq 1$.
- Határeloszlástételek általában?
- Tényleg nem tudjuk felírni három kecske stacionárius eloszlását?
- Fluid limesz általános rátafüggvényekre / ugrás eloszlásokra?

Köszönöm a figyelmet.